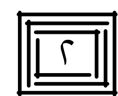


أي من الأعداد التالية هو الأكبر:

أ- ٢$!%	ب- ٤*%@	جـ- ٨!&!	د- ١٦*@!	هـ- ٣٢#)!



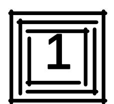
إذا كان : أ * ب = أ^ب ، فإن : $\frac{((٢*٢)*٢)*٢}{٢*(٢*(٢*٢))}$ =

أ- $\frac{1}{256}$	ب- $\frac{1}{4}$	جـ- ١	د- ٤	هـ- ٢٥٦

3

عائلة صالح مؤلفة من أب وأم وبعض الأبناء متوسط أعمار أعضاء العائلة يساوي ٢٠ سنة ، وعمر الأب يساوي ٤٨ سنة ، ومتوسط عمر الأم والأبناء يساوي ١٦ سنة ، فإن عدد الأبناء يساوي :

أ- ٢	ب- ٣	جـ- ٤	د- ٥	هـ- ٦



أي من الأعداد التالية هو الأكبر:

أ- ٢$!%	ب- ٤*%@	جـ- ٨!&!	د- ١٦*@!	هـ- ٣٢#)!

الحل :

٢$!% .... { ١ }

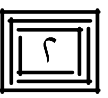
٤*%@ = { ٢@ }*%@ = ٢ ^!% .... { ٢ }

٨!&! = { ٢# }!&! = ٢ #!% .... { ٣ }

١٦*@! = { ٢$ }*@! = ٢ @!% .... { ٤ }

٣٢#)! = { ٢% }#)! = ٢ %!% .... { ٥ }

∴ واضح جداً أن : ٢^!% هي الأكبر ⇐ الإجابة الصحيحة : ب



إذا كان : أ * ب = أ^ب ، فإن : $\frac{((٢*٢)*٢)*٢}{(٢*(٢*(٢*٢))}$ =

أ) $\frac{1}{256}$	ب) $\frac{1}{4}$	جـ) ١	د) ٤	هـ) ٢٥٦

الحل :

$$\frac{((٢*٢)*٢)*٢}{٢*(٢*(٢*٢))} = \frac{(٢*4)*٢}{٢*(٢*4)} = \frac{16*٢}{٢*16}$$

$$= \frac{٢^{16}}{16^{٢}} = \frac{٢^{16}}{(٢^{4})^{٢}} = \frac{٢^{16}}{٢^{8}}$$

$$= ٢^{8} = 256$$

∴ الإجابة الصحيحة هي : هـ

3

عائلة صالح مؤلفة من أب وأم وبعض الأبناء متوسط أعمار أعضاء العائلة يساوي ٢٠ سنة ، وعمر الأب يساوي ٤٨ سنة ، ومتوسط عمر الأم والأبناء يساوي ١٦ سنة ، فإن عدد الأبناء يساوي :

أ~ ٢	ب~ ٣	جـ~ ٤	د~ ٥	هـ~ ٦

الحل :

نفرض : عدد أعضاء العائلة = م ، نفرض : مجموع أعمار الأم والأبناء = ب

∴ متوسط عمر العائلة :

$$20 = \frac{ب + 48}{م} \Leftarrow 20م = ب + 48$$

$$\Leftarrow ب = 20م - 48 \quad \cdots\cdots (1)$$

متوسط عمر الأم والأبناء : $16 = \frac{ب}{م - 1} \Leftarrow 16م - 16 = ب \quad \cdots\cdots (٢)$

بمساواة : {١} ، {٢} نجد أن :

$$20م - 48 = 16م - 16 \Leftarrow 4م = 32 \Leftarrow م = 8$$

∴ عدد أفراد العائلة = ٨ أفراد ⟸ عدد الأبناء = ٦ .

∴ الإجابة الصحيحة هي : هـ~



إذا كان : $أ + أ^{-1} = 4$ ، فإن قيمة : $أ^{4} + أ^{-4} =$

أ- ١٦٤	ب- ١٧٢	ج- ١٩٢	د- ١٩٤	هـ- ٢١٢

5

كم عدد قيم س الحقيقية التي تجعل : $\sqrt{120 - \sqrt{s}}$ عدداً صحيحاً .

أ- ٣	ب- ٦	ج- ٩	د- ١٠	هـ- ١١

6

المثلث : أ ب ج قائم الزاوية في ب إذا كان ' أ ب ' = ١ ، ' ب ج ' = ٢ ، المنصف للزاوية : $\widehat{ب أ ج}$ يقطع الضلع : ب ج في النقطة : هـ ، فإن : ' ب هـ ' =

أ- $\frac{\sqrt{3} - 1}{2}$	ب- $\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$	ج- $\frac{\sqrt{5} + 1}{2}$	د- $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$	هـ- $2\sqrt{6} - 1$



إذا كان : $أ + أ^{-1} = 4$ ، فإن قيمة : $أ^{4} + أ^{-4} =$

أ- ١٦٤	ب- ١٧٢	ج- ١٩٢	د- ١٩٤	هـ- ٢١٢

الحل :

بتربيع طرفي المعادلة : $أ + أ^{-1} = 4$ نجد أن :

$أ^{٢} + أ^{-٢} + ٢ = 16$ Ü $أ^{٢} + أ^{-٢} = 14$ ....(1)

بتربيع طرفي المعادلة : { ١ } نجد أن :

$أ^{4} + أ^{-4} + ٢ = 196$ Ü $أ^{4} + أ^{-4} = 194$

∴ الإجابة الصحيحة هي : د

5

كم عدد قيم س الحقيقية التي تجعل : $\sqrt{120 - \sqrt{s}}$ عدداً صحيحاً .

أ ~ ٣	ب ~ ٦	جـ ~ ٩	د ~ ١٠	هـ ~ ١١

الحل :

لكي يكون المقدار : $\sqrt{120 - \sqrt{s}}$ عدداً صحيحاً يجب أن يكون ماتحت الجذر مربعاً كاملاً .

الآن :

نبحث عن القيم التي يكون عندها المقدار : $120 - \sqrt{s}$ مساوياً لمربعٍ كاملٍ لأجل هذا سنبحث عن الأعداد التي تمثل مربع كامل وأقل من ١٢٠ ، وهي القيم التالية :

٠ ، ١ ، ٤ ، ٩ ، ١٦ ، ٢٥ ، ٣٦ ، ٤٩ ، ٦٤ ، ٨١ ، ١٠٠

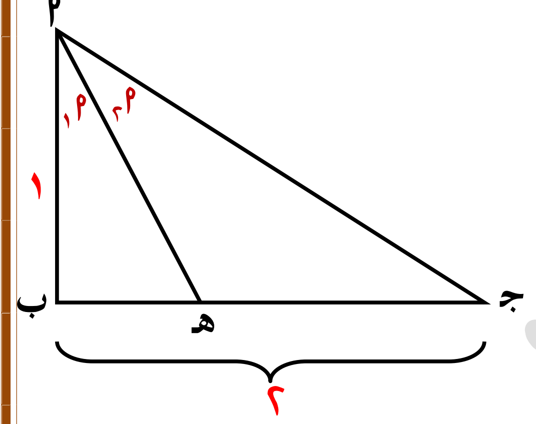
وعددها تساوي إحدى عشر قيمة .

∴ الإجابة الصحيحة هي : هـ ~

6

المثلث : م ب جـ قائم الزاوية في ب إذا كان ' م ب ' = ١ ، ' ب جـ ' = ٢ ، المنصف للزاوية : ب أ جـ يقطع الضلع : ب جـ في النقطة : هـ ، فإن : ' ب هـ ' =

أ~	ب~	جـ~	د~	هـ~
$\frac{\sqrt{3}-1}{٢}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{٢}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{٢}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{٢}}{٢}$	$٢\sqrt{6}-1$



الحل :

من المثلث م ب هـ نجد أن : ظا(أ₁) = $\frac{| f i|}{1}$ = | f i|

ولكن : ظا(٢أ₁) = ٢

١ ظا(٢أ₁) = $\frac{٢ظا(أ_1)}{١ - ظا(أ_1)}$ = ٢ Ü ٢ظا(أ₁) = ٢ - ٢ظا²(أ₁)

∴ Ü ٢ظا²(أ₁) + ٢ظا(أ₁) - ٢ = 0

Ü ظا²(أ₁) + ظا(أ₁) - 1 = 0

ولكن : ظا(أ₁) = | f i| ⇐ بالتعويض وحل معادلة من الدرجة الثانية نجد أن :

| f i| = $\frac{\sqrt{5}-1}{٢}$

∴ الإجابة الصحيحة هي : ب



عدد الأعداد المكونة من خانتين مجموعهما زوجي =

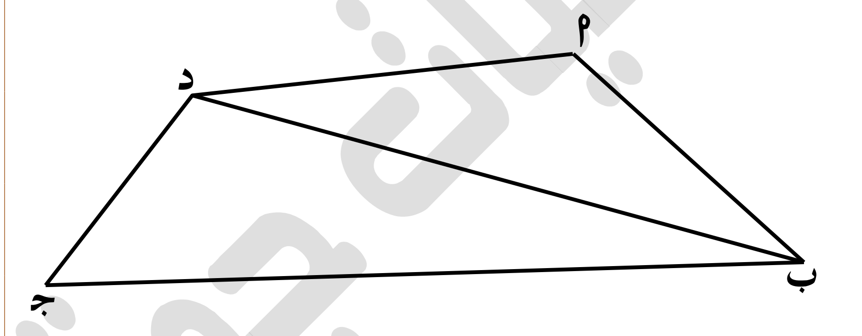
أ- ٩٠	ب- ٥٠	جـ- ٤٥	د- ٢٠	هـ- ٢٥

8

إذا كانت : أ ، ب ، جـ ، د أعداد حقيقية حيث : ‘ أ - ب ‘ = ٢ ، ‘ ب - جـ ‘ = ٣ ،

‘ جـ - د ‘ = ٤ ، فإن مجموع القيم المحتملة لــ ‘ أ - د ‘ =

أ- ٩	ب- ١٢	جـ- ١٥	د- ١٨	هـ- ٢٤



9

في الرباعي : أ ب جـ د : ‘أ ب‘ = ٥ ، ‘ب جـ‘ = ١٧ ، ‘جـ د‘ = ٥ ، ‘د أ ‘ = ٩ ، إذا كان طول

الضلع د ب سيكون صحيحاً ، فإن طوله =

أ- ١١	ب- ١٢	جـ- ١٣	د- ١٤	هـ- ١٥



عدد الأعداد المكونة من خانتين مجموعهما زوجي =

أ- ٩٠	ب- ٥٠	جـ- ٤٥	د- ٢٠	هـ- ٢٥

الحل :

نفرض العدد على الصورة = أب ⇐ خانة الآحاد = أ ، خانة العشرات = ب

∴ احتمال خانة الآحاد = ١٠ ، احتمال خانة المئات = ٩ لعدم دخول الصفر .

الآن :

خانة الآحاد فيها خمس أعداد زوجية وخمسة فردية .

خانة العشرات فيها أربعة زوجية وخمسة فردية .

المجموع الزوجية يأتي من حاصل جمع زوجي وزوجي أو فردي وفردي .

∴ عدد الأعداد التي مجموعها زوجي من حاصل الجمع الزوجي = ٥ × ٤ = ٢٠ عدداً .

عدد الأعداد التي مجموعها زوجي من حاصل الجمع الفردي = ٥ × ٥ = ٢٥ عدداً .

∴ عدد الأعداد التي تحقق المطلوب = ٢٠ + ٢٥ = ٤٥ عدداً .

∴ الإجابة الصحيحة هي : جـ

8

إذا كانت : ٩ ، ب ، جـ ، د أعداد حقيقية حيث : ‘ ٩ - ب ‘ = ٢ ، ‘ ب - جـ ‘ = ٣ ،

‘ جـ - د ‘ = ٤ ، فإن مجموع القيم المحتملة لــ ‘ ٩ - د ‘ =

٩- ٩	ب- ١٢	جـ- ١٥	د- ١٨	هـ- ٢٤

الحل :

∵ ‘ ٩ - ب ‘ = ٢ ⇐ ٩ - ب = ± ٢ ....{ ١ }

‘ ب - جـ ‘ = ٣ ⇐ ب - جـ = ± ٣ ....{ ٢ }

‘ جـ - د ‘ = ٤ ⇐ جـ - د = ± ٤ ....{ ٣ }

الآن :

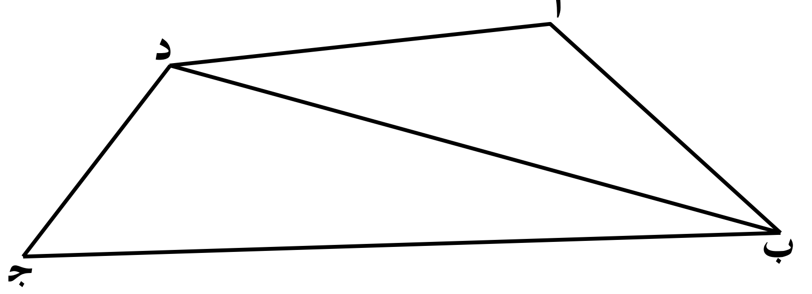
بجمع { ١ } + { ٢ } ، نجد أن : ٩ - جـ = ± ٥ ....{ ٤ }

بجمع { ٣ } + { ٤ } ، نجد أن : ٩ - د = ± ٩

∴ حاصل جمع قيم ‘ ٩ - د ‘ = ‘ ٩ ‘ + ‘ - ٩ ‘ = ٩ + ٩ = ١٨ .

∴ الإجابة الصحيحة هي : د-

9



في الرباعي : م ب جـ د : 'م ب' = ٥ ، 'ب جـ' = ١٧ ، 'جـ د' = ٥ ، 'د م' = ٩ ، إذا كان طول الضلع د ب سيكون صحيحاً ، فإن طوله =

م- ١١	ب- ١٢	جـ- ١٣	د- ١٤	هـ- ١٥

الحل :

تذكير :

متتالية المثلث : حاصل طرح أي ضلعين < من الضلع الثالث < حاصل جمع أي ضلعين

∴ في المثلث : م ب جـ نجد أن :

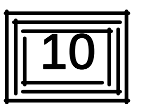
'م د' - 'م ب' < 'ب د' < 'م د' + 'م ب' ⇐ ٤ < ' ب د ' < ١٤ .... { ١ }

∴ في المثلث : ب د جـ نجد أن :

'ب جـ' - 'جـ د' < 'ب د' < 'ب جـ' + 'جـ د' ⇐ ١٢ < ' ب د ' < ٢٢ .... { ٢ }

∴ ١٢ < ' ب د ' < ١٤ ⇐ ' ب د ' = ١٣ .

∴ الإجابة الصحيحة هي : جـ



أكبر عدد من النقاط التي يمكن أن تقطع دائرة ومثلث في آنٍ واحد =

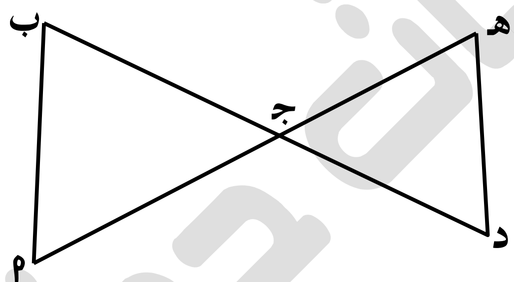
أ- ٢	ب- ٣	جـ- ٤	د- ٥	هـ- ٦

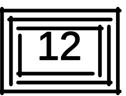
11

إذا كانت : $\{(\frac{s}{3})\} = s^{2} + s + 1$ ، فإن مجموع كل القيم لــ ص التي تحقق : $\{(w3)\} = 7$

تساوي :

أ- $-\frac{١}{٣}$	ب- $-\frac{١}{٩}$	جـ- صفر	د- $\frac{٥}{٩}$	هـ- $\frac{٥}{٣}$

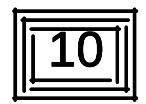




في الرباعي : أ ب جـ د هـ : أب = ب جـ = جـ د = جـ هـ ، كذلك :

$\widehat{\text{ب أ حـ}} = \frac{5}{٢}\ \widehat{\text{أ ب حـ}}$ ، فإن قياس الزاوية : $\widehat{\text{حـ i\}}}$ =

أ- ٥٢,٥°	ب- ٥٥°	جـ- ٥٧,٥°	د- ٦٠°	هـ- ٦٢,٥°

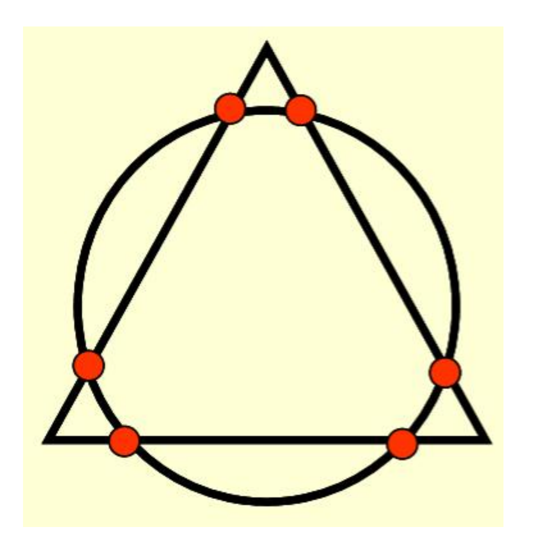


أكبر عدد النقاط التي يمكن أن تقطع دائرة ومثلث في آنٍ واحد =

أ- ٢	ب- ٣	جـ- ٤	د- ٥	هـ- ٦

الحل :

أكبر عدد من النقاط التي تحقق المطلوب هي ست نقاط حيث كل ضلع في المثلث بالكثير سيقطع الدائرة في نقطتين كما في الرسم :



∴ الإجابة الصحيحة هي : هـ

11

إذا كانت : $د\left(\frac{س}{3}\right) = س^{2} + س + 1$ ، فإن مجموع كل القيم لـ ص التي تحقق : $د(3ص) = 7$

تساوي :

أ) $-\frac{1}{3}$	ب) $-\frac{1}{9}$	جـ) صفر	د) $\frac{1}{9}$	هـ) $\frac{1}{3}$

الحل :

عندما : $\frac{س}{3} = 3ص \Leftarrow س = 9ص$

$د(3ص) = (9ص)^{2} + 9ص + 1 \Leftarrow د(3ص) = 81ص^{2} + 9ص + 1$

$د(3ص) = 7 \Leftarrow 81ص^{2} + 9ص + 1 = 7$

$\Leftarrow 81ص^{2} + 9ص - 6 = 0$

$\Leftarrow 27ص^{2} + 3ص - 2 = 0$

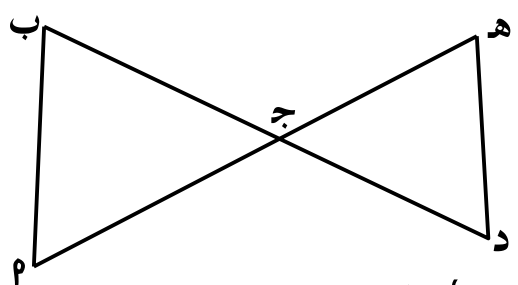
$\Leftarrow (9ص - 2)(3ص + 1) = 0$

$\therefore$ إما $ص = \frac{2}{9}$ ، أو $ص = -\frac{1}{3}$.

$\therefore$ مجموع قيم ص $= \frac{2}{9} - \frac{1}{3} = \frac{2}{9} - \frac{3}{9} = -\frac{1}{9}$

$\therefore$ الإجابة الصحيحة هي : ب

12



في الرباعي : م ب ج د هـ : م ب = ب ج = ج د = ج هـ ، كذلك :

ب أ حـ = 5/٢ أ ب حـ ، فإن قياس الزاوية : حـ أ = ؟

م- ٥٢,٥°	ب- ٥٥°	جـ- ٥٧,٥°	د- ٦٠°	هـ- ٦٢,٥°

الحل :

∵ م ب = ب ج ⇐ المثلث : م ب ج متطابق الضلعين ⇐ أ = [

١ 5/٢ أ ب حـ + 5/٢ أ ب حـ + أ ب حـ = 180°

6 أ ب حـ = 180° ← أ ب حـ = 30°

∴ أ = [75°

∵ ج د = ج هـ ⇐ المثلث : ج د هـ متطابق الضلعين ⇐ أ = }

∵ [= 75° ⇐ أ + } = 105° ← [} أ = ٥٢,٥°

∴ الإجابة الصحيحة هي : م-

13

إذا كان : جاأ + جاب = $\sqrt{\frac{5}{3}}$ ، جتاأ + جتاب = 1 ، فإن : جتا(أ - f) =

أ- $\sqrt{\frac{5}{3}} - 1$	ب- $\frac{1}{3}$	جـ- $\frac{1}{٢}$	د- $\frac{٢}{3}$	هـ- ١

14

إذا عرفنا العمليتين : أ Ä ب = أب - ب^٢^ ، أ ⊙ ب = أ + ب - أب^٢^ ، فإن قيمة :

$\frac{6 A ٢}{6 ⊙ ٢}$ =

أ- - $\frac{1}{٢}$	ب- - $\frac{1}{4}$	جـ- $\frac{1}{8}$	د- $\frac{1}{4}$	هـ- $\frac{1}{٢}$

15

أقل عدد من الأشخاص يحققوا أن أثنين منهما ولدا في نفس اليوم =

أ- ٧	ب- ٨	جـ- ١٥	د- ٢	هـ- ٣

13

إذا كان : جا أ + جا ب = $\sqrt{\frac{5}{3}}$ ، جتا أ + جتا ب = 1 ، فإن : جتا (أ - ب) =

أ- $\sqrt{\frac{5}{3}} - 1$	ب- $\frac{1}{3}$	جـ- $\frac{1}{2}$	د- $\frac{2}{3}$	هـ- ١

الحل :

من متطابقة الفرق بين زاويتين لــ جتا نجد أن : جتا (أ - ب) = جتا(أ)جتا(ب) + جا(أ)جا(ب)

الآن :

بتربيع المعادلة الأولى نجد أن :

$(\text{جا أ} + \text{جا ب})^2 = \frac{5}{3}$ ⟸ جا² أ + جا² ب + ٢ جا(أ)جا(ب) = $\frac{5}{3}$ ......(1)

بتربيع المعادلة الثانية نجد أن :

$(\text{جتا أ} + \text{جتا ب})^2 = 1$ ⟸ جتا² أ + جتا² ب + ٢ جتا(أ)جتا(ب) = 1 ......(٢)

الآن :

بجمع : (1) + (٢) ، والاستفادة من المتطابقة الأساسية الأولى ؛ نجد أن :

1 + 1 + ٢ جتا(أ)جتا(ب) + ٢ جا(أ)جا(ب) = $\frac{8}{3}$

⟸ ٢ [جتا(أ)جتا(ب) + جا(أ)جا(ب)] = $\frac{2}{3}$

⟸ جتا(أ)جتا(ب) + جا(أ)جا(ب) = $\frac{1}{3}$ ⟸ جتا(أ - ب) = $\frac{1}{3}$

∴ الإجابة الصحيحة هي : ب

14

إذا عرفنا العمليتين : أ Ä ب = أب - ب^٢ ، أ ⊙ ب = أ + ب - أب^٢ ، فإن قيمة :

$$\frac{6 \text{ A } ٢}{6 \odot ٢} =$$

أ- $-\frac{1}{٢}$	ب- $-\frac{1}{4}$	جـ- $\frac{1}{8}$	د- $\frac{1}{4}$	هـ- $\frac{1}{٢}$

الحل :

بالتعويض المباشر :

$$\frac{6 \text{ Ä } ٢}{6 \odot ٢} = \frac{6 \text{ ´ } ٢ - 4}{6 + ٢ - 6 \text{ ´ } 4}$$

$$= \frac{8}{-16} = -\frac{1}{٢}$$

∴ الإجابة الصحيحة هي : ب

15

أقل عدد من الأشخاص يحققوا أن أثنين منهما ولدا في نفس اليوم =

أ- ٧	ب- ٨	جـ- ١٥	د- ٢	هـ- ٣

الحل :

∵ عدد أيام الأسبوع سبعة أيام ⇐ يجب أن يكون عدد الأشخاص أكثر من سبعة .

لاحظ :

إذا كان عدد الأشخاص مساوياً للسبعة أو أقل فإن هذا يحتمل أن يكون كل شخص ولد في يوم مختلف أو توجد أيام لم يولد فيها أحد .

∴ أقل عدد من الأشخاص يحقق أن أثنين ولدا في نفس اليوم = ثمانية أشخاص .

والسبب :

أكيد سيحقق أن أثنين على الأقل ولدا في نفس اليوم .

∴ الإجابة الصحيحة هي : ب

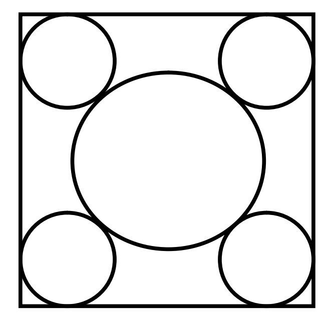
16

الأعداد الحقيقية : ٢ ، ب تحقق المعادلات : $3^{أ} = (81)^{ب+٢}$ ، $(125)^{ب} = 5^{أ-3}$ ، فإن :

٢ × ب =

أ- ‎-٦٠	ب- ‎-١٧	جـ- ٩	د- ١٢	هـ- ٦٠

17



الدوائر الصغيرة التي تمس أضلاع المربع طول نصف قطرها = ١ ،

الدائرة الكبرى تمس الدوائر الأربع طول نصف قطرها = ٢ ، فإن مساحة المربع =

أ- ٣٢	ب- ٢٢+١٢ ‏[٢	جـ- ١٦+١٦ ‏[٢	د- ٤٨	هـ- ٣٦+١٦ ‏[٢

18

عدد الأزواج المرتبة الصحيحة الموجبة : { ٢ ، ب } التي تحقق أن القاسم المشترك الأعظم :

لـ { ٢ ، ب } = ١ ، وتجعل المقدار : $\frac{أ}{ب} + \frac{14ب}{أ}$ عدداً صحيحاً تساوي :

أ- ٣	ب- ٤	جـ- ٥	د- ٦	هـ- ٧

16

الأعداد الحقيقية : م ، ب تحقق المعادلات : $3^{أ} = (81)^{ب+م}$ ، $(125)^{ب} = 5^{أ-3}$ ، فإن :

م × ب =

أ- - ٦٠	ب- - ١٧	جـ- ٩	د- ١٢	هـ- ٦٠

الحل :

∵ $3^{أ} = (81)^{ب+م}$ Ü $3^{أ} = (3^{4})^{ب+م}$

Ü $3^{أ} = 3^{4ب+8}$ **Ü أ = 4ب + 8**

∵ $(125)^{ب} = 5^{أ-3}$ Ü $(5^{3})^{ب} = 5^{أ-3}$

Ü $5^{3ب} = 5^{أ-3}$ **Ü 3ب = أ - 3**

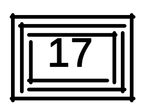
الآن :

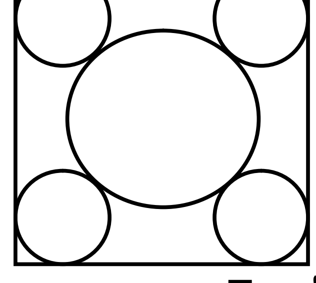
بالتعويض من المعادلة الأولى في الثانية :

٣ب = ٤ب + ٨ - ٣ ⇐ **ب = - ٥** ، ⇐ **م = - ١٢**

⇐ **م × ب = ٦٠**

∴ الإجابة الصحيحة هي : هـ





الدوائر الصغيرة التي تمس أضلاع المربع طول نصف قطرها = ١ ،

الدائرة الكبرى تمس الدوائر الأربع طول نصف قطرها = ٢ ، فإن مساحة المربع =

أ~ ٣٢	ب~ ١٢+٢٢ √٢	جـ~ ١٦+١٦ √٢	د~ ٤٨	هـ~ ١٦+٣٦ √٢

الحل :

من المعطيات بسهولة سنجد أن طول قطر المربع = ٨

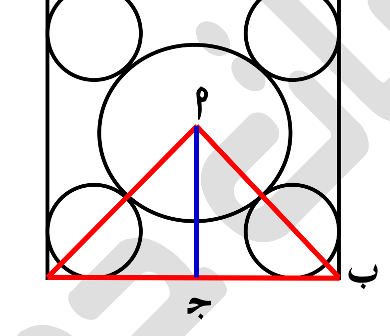
الطريقة الأولى السريعة :

من قانون مساحة المربع بمعلومية طول قطره = $\frac{1}{2}$ × مربع طول القطر

⇐ مساحة المربع = $\frac{1}{2}$ × ٨² = ٤ × ٨ = ٣٢ .



الطريقة الثانية :



المثلث : م ب جـ مثلث : ٤٥° قائم الزاوية

جـ : منتصف طول ضلع المربع ، ' م ب ' = ٤ نصف القطر

⇐ ' ب جـ ' = ' م ب ' × جتا٤٥° ⇐ ' ب جـ ' = ٢ √٢

∴ طول ضلع المربع = ٤ √٢ ⇐ مساحة المربع = ١٦ × ٢ = ٣٢ .

∴ الإجابة الصحيحة هي : أ~

18

عدد الأزواج المرتبة الصحيحة الموجبة : { ﻡ ، ب } التي تحقق أن القاسم المشترك الأعظم :

لـ { ﻡ ، ب } = ١ ، وتجعل المقدار : $\frac{أ}{ب} + \frac{14ب}{أ}$ عدداً صحيحاً تساوي :

أ- ٣	ب- ٤	جـ- ٥	د- ٦	هـ- ٧

الحل :

∵ المقدار : $\frac{أ}{ب} + \frac{14ب}{أ}$ يجب أن يكون عدداً صحيحاً ، ستكون عندنا الحالات التالي :

١ إما : ﻡ = ب = ١ ومنه سنجد أن المقدار = ١٥ أي : { ١ ، ١ } يحقق المطلوب .

٢ إما : ﻡ = ١ ، ب ≠ ١ ، ومنه سنجد أن المقدار = $\frac{1}{ب} + 14ب$ وهذا لن يكون عدداً صحيحاً .

٣ إما : ﻡ ≠ ١ ، ب = ١ ، ومنه سيصبح المقدار على الصورة : $أ + \frac{14}{أ}$

سنبحث فقط عن قواسم ١٤ الموجبة وهي : ١ ، ٢ ، ٧ ، ١٤ ومنه سنجد أن الأزواج هي :

{ ١ ، ١ } ، { ٢ ، ١ } ، { ٧ ، ١ } ، { ١٤ ، ١ } أربعة أزواج فقط على الصورة : { ﻡ ، ب } .

∴ الإجابة الصحيحة هي : ب

19

إذا كانت : $د(س + 3) = 3س^2 + 7س + 4$ ، كذلك : $د(س) = أس^2 + ب س + جـ$

، فإن قيمة : أ + ب + جـ =

أ- - ١	ب- صفر	جـ- ١	د- ٢	هـ- ٣

20

إذا كان : $ن + ٢ن^2 + 3ن^3 + 4ن^4 + \cdots\cdots + ك ن^ك = 48 + 49ن$ ، فإن قيمة : ك =

أ- ٢٤	ب- ٤٨	جـ- ٤٩	د- ٩٧	هـ- ٩٨

21

الشكل يمثل خمس مربعات متطابقة ممثلة في المستوى الإحداثي ، المستقيم

المار بالنقطتين : { ٣ ، ٣ } ، { أ ، ٠ } يقسم الشكل إلى مساحتين متطابقتين ، فإن قيمة : أ =

أ- $\frac{١}{٢}$	ب- [illegible]	جـ- [illegible]	د- [illegible]	هـ- [illegible]

19

إذا كانت : $د(س+3) = 3س^{2} + 7س + 4$ ، كذلك : $د(س) = أس^{2} + بس + جـ$

، فإن قيمة : $أ + ب + جـ =$

أ- ١ -	ب- صفر	جـ- ١	د- ٢	هـ- ٣

الحل :

$\because د(س) = أس^{2} + بس + جـ \Leftarrow د(1) = أ + ب + جـ$

ولكن :

$د(س+3) = 3س^{2} + 7س + 4$ ⟸ نعوض عن : س = - ٢ ، نجد أن :

$د(-٢+3) = د(1) = 3(-٢)^{2} + 7 \times -٢ + 4 \Leftarrow د(1) = ٢$

$\therefore أ + ب + جـ = ٢$

∴ الإجابة الصحيحة هي : د

20

إذا كان : $j + ٢j^{٢} + 3j^{3} + 4j^{4} + \cdots\cdots + k\,j^{k} = 48 + 49j$ ، فإن قيمة : ن =

أ- ٢٤	ب- ٤٨	جـ- ٤٩	د- ٩٧	هـ- ٩٨

الحل :

نلاحظ أن :

مجموع : $j + ٢j^{٢} + 3j^{3} + 4j^{4} = j - ٢ - 3j + 4 = ٢ - ٢j$

وبالمثل : $5j^{5} + 6j^{6} + 7j^{7} + 8j^{8} = 5j - 6 - 7j + 8 = ٢ - ٢j$

∴ كل أربعة حدود مجموعها = $٢ - ٢j$

⇐ بجمعها أربعةً وعشرين مرة يكون الناتج = $48 - 48j$

∴ سيكون عندنا ٩٦ حداً مجموعها = $48 - 48j$

ولكن : المجموع يجب أن يساوي : $48 + 49j$

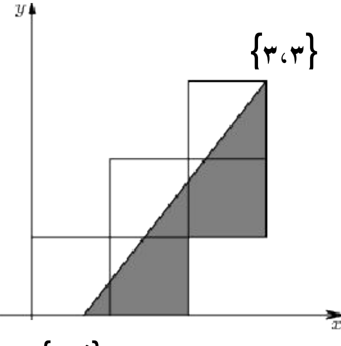
بإضافة الحد رقم ٩٧ الذي يساوي : $97j^{97}$

⇐ $48 - 48j + 97j^{97} = 48 - 48j + 97j = 48 + 49j$

∴ الإجابة الصحيحة هي : د-



21



الشكل يمثل خمس مربعات متطابقة ممثلة في المستوى الإحداثي ، المستقيم المار بالنقطتين : { ٣ ، ٣ } ، { ٩ ، ٠ } يقسم الشكل إلى مساحتين متطابقتين ، فإن قيمة : ٩ =

٩- $\frac{١}{٢}$	ب- $\frac{٣}{٥}$	جـ- $\frac{٢}{٣}$	د- $\frac{٣}{٤}$	هـ- $\frac{٤}{٥}$

الحل :

لاحظ :

كل مربع صغير مساحته = ١ وحدة مربعة . ∴ مساحة الشكل = ٥ وحدات مربعة .

⇐ مساحة الجزء المظلل = $\frac{٥}{٢}$.

ولكن :

لو أكملنا الجزء المظلل بالمربع الناقص سنحصل على مثلث قائم الزاوية ضلعاه: ٣ ، ٣ - ٩ .

∴ مساحة الجزء المظلل = $\frac{(3-أ)\times 3}{٢} - 1$

$$\frac{(3-أ)\times 3}{٢} - 1 = \frac{5}{٢} \Leftarrow \frac{(3-أ)\times 3}{٢} = \frac{7}{٢}$$

$$\Leftarrow 9 - 3أ = 7 \Leftarrow 3أ = ٢ \Leftarrow أ = \frac{٢}{3}$$

∴ الإجابة الصحيحة هي : جـ

22

عدد الأعداد التي يمكن تكوينها من المجموعة : ٢ ، ٢ ، ٣ ، ٣ ، ٥ ، ٥ ، ٥ المكونة من سبع خانات بحيث أن قراءتها من اليمين واليسار لن يتغير { مثل : ١٢٣٢١ } تساوي :

أ- ٦	ب- ١٢	جـ- ٢٤	د- ٣٦	هـ- ٤٨

23

عدد الأزواج المرتبة { أ ، ب } الصحيحة الموجبة التي تحقق أن أ > ب ، وكان الفرق بين مربعيها مساوياً لـــ ٩٦ =

أ- ٣	ب- ٤	جـ- ٦	د- ٩	هـ- ١٢

24

في الشكل المقابل مربع بداخله أربعة مستطيلات متطابقة ، إذا كانت مساحة المربع الكبير تساوي أربعة أمثال مساحة المربع الصغير ، فإن النسبة بين طول الضلع الكبير إلى الصغير في كل مستطيل =

أ- ٣	ب- $\sqrt{١٠}$	جـ- ٢ + $\sqrt{٢}$	د- ٢ $\sqrt{٣}$	هـ- ٤

22

عدد الأعداد التي يمكن تكوينها من المجموعة : ٢ ، ٢ ، ٣ ، ٣ ، ٥ ، ٥ ، ٥ المكونة من سبع خانات بحيث أن قراءتها من اليمين واليسار لن يتغير { مثل : ١٢٣٢١ } تساوي :

أ~ ٦	ب~ ١٢	جـ~ ٢٤	د~ ٣٦	هـ~ ٤٨

الحل :

الحظ : المطلوب أن يكون العدد على الصورة : أب جـ د جـ ب أ ، العدد بهذه الصورة لن تتغير قراءته .

الآن :

∵ العدد مكون من سبع خانات ∴ أكيد ستكون أحد الخمسات في المنتصف .

∴ "سيكون التغيير بين الخانات الثلاث الأولى أو الثلاث الأخيرة لأنه إذا تغيرت الأولى ستتغير الأخيرة مثلها .

∴ عدد طرق اختيار أ = ٣ ، عدد طرق اختيار ب = ٢ ، عدد طرق اختيار جـ = ١

∴ عدد طرق اختيار : أ ، ب ، جـ معاً سيكون بطرق = ٣ × ٢ × ١ = ٦ طرق

∴ عدد الأعداد = ٦

∴ الإجابة الصحيحة هي : أ~

ملاحظة : هذه الطريقة تعطينا الحل الصحيح إذا كانت عدد الاختيارات كبير جداً

23

عدد الأزواج المرتبة { أ ، ب } الصحيحة الموجبة التي تحقق أن أ > ب ، وكان الفرق بين مربعيها مساوياً لـــ ٩٦ =

أ- ٣	ب- ٤	جـ- ٦	د- ٩	هـ- ١٢

الحل :

∵ الفرق بين مربعي : أ ، ب = ٩٦ ⟸ أ² - ب² = ٩٦

∴ {أ + ب}{أ - ب} = ٩٦ = ٢⁵ × ٣ ∵ أ > ب ⟸ أ + ب > أ - ب

∴ {أ + ب}{أ - ب} = ١٦ × ٦ ⟸ أ + ب = ١٦ ، أ - ب = ٦

بحل النظام سنجد أن : أ = ١١ ، ب = ٥ وهي تحقق المطلوب .

بالمثل سنجد أن : { أ + ب ، أ - ب } = { ١٢ ، ٨ } ، { ٢٤ ، ٤ } ، { ٤٨ ، ٢ }

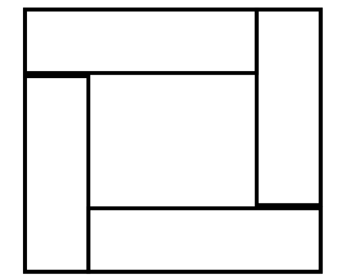
بحلها سنحصل على : { أ ، ب } = { ١٠ ، ٢ } ، { ١٤ ، ١٠ } { ٢٥ ، ٢٣ }

∴ توجد أربعة أزواج تحقق المطلوب وهي : {١١ ، ٥} ، {١٠ ، ٢} ، {١٤ ، ١٠} {٢٥ ، ٢٣}

∴ الإجابة الصحيحة هي : ب

ملاحظة : لم نأخذ العومل : ٣٢ × ٣ و ٩٦ × ١ لأنها لا تعطي أعداداً صحيحة .

24



في الشكل المقابل مربع بداخله أربعة مستطيلات متطابقة ، إذا كانت مساحة المربع الكبير تساوي أربعة أمثال مساحة المربع الصغير ، فإن النسبة بين طول الضلع الكبير إلى الصغير في كل مستطيل =

أ) ٣	ب) $\sqrt{١٠}$	جـ) ٢ + $\sqrt{٢}$	د) ٢ $\sqrt{٣}$	هـ) ٤

الحل :

نفرض طول المستطيل = أ ، وعرضه = ب ⟸ مساحته = أ × ب

كذلك :

طول ضلع المربع الكبير = أ + ب ⟸ مساحته = { أ + ب }^{2}

طول ضلع المربع الصغير = أ - ب ⟸ مساحته = { أ - ب }^{2}

∵ مساحة المربع الكبير = ٤ × مساحة المربع الصغير

∴ { أ + ب }^{2} = ٤ × { أ - ب }^{2} ⟸ أ + ب = ٢أ - ٢ب ⟸ **أ = ٣ب**

∴ طول المستطيل = ثلاثة أمثال عرضه

∴ الإجابة الصحيحة هي : أ)

25

العدد الحقيقي س غير الصفري الذي يحقق المعادلة : { ٧س }$! = { ١٤س }&

أ- [illegible]	ب- [illegible]	جـ- ١	د- ٧	هـ- ١٤

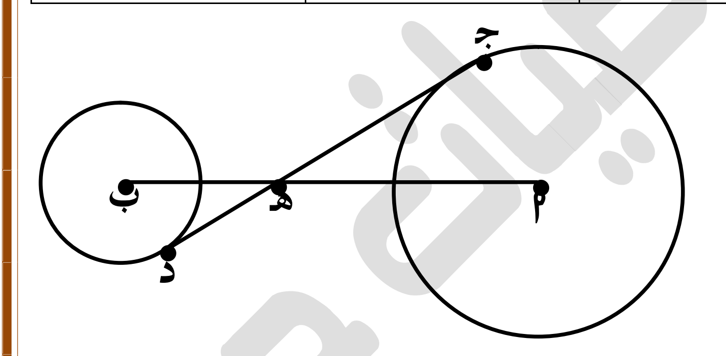
26

عدد الأعداد الصحيحة الموجبة من أربع خانات وتحتوي أحد خاناتها على الأقل أحد العددين :

٢ أو ٣ =

أ- ٢٤٣٩	ب- ٤٠٩٦	جـ- ٤٩٠٣	د- ٤٩٠٤	هـ- ٥٤١٦

27



أنصاف أقطار الدائرتين على التوالي ٨ ، ٣ ، المستقيمان : أ ب ، جـ د يتقاطعان في النقطة : هـ حيث :

‘ ب هـ ‘ = ٥ ، المستقيم : جـ د يمس الدائرتين في النقطتين : جـ ، د كما هو موضح في الرسم ، فإن طول : ‘ جـ د ‘ =

أ- ١٣	ب- $$/٢	جـ- [١٢ ‖٢‖	د- [٢٥ ‖٢‖	هـ- %%/٣

25

العدد الحقيقي س غير الصفري الذي يحقق المعادلة : $(٧س)^{١٤} = (١٤س)^{٧}$

أ) $\frac{١}{٧}$	ب) $\frac{٢}{٧}$	جـ) ١	د) ٧	هـ) ١٤

الحل :

$(٧س)^{١٤} = (١٤س)^{٧} \Leftarrow (١٤س) = (٧س)^{٢}$

$\Leftarrow (٧س)^{٢} - (١٤س) = 0$

$\Leftarrow ٧س(٧س - ٢) = 0$

∴ إما ٧س = ٠ ⇐ س = ٠ { مستحيل }

أو ٧س - ٢ = ٠ ⇐ ٧س = ٢ ⇐ س = $\frac{٢}{٧}$ مقبول

∴ الإجابة الصحيحة هي : ب

26

عدد الأعداد الصحيحة الموجبة من أربع خانات وتحتوي في أحد خاناتها على الأقل أحد العددين :

٢ أو ٣ =

أ- ٢٤٣٩	ب- ٤٠٩٦	جـ- ٤٩٠٣	د- ٤٩٠٤	هـ- ٥٤١٦

الحل :

∵ المطلوب عدد الأعداد من أربع خانات وتحتوي إحداها على الأقل على أحد العددين : ٢ ، ٣

ملاحظة مهمة :

معنى على الأقل : المطلوب عدد الأعداد التي تحتوي في أحد خاناتها أو بعضها أو كلها على ٢ فقط أو ٣ فقط أو ٢ ، ٣

من الأفضل :

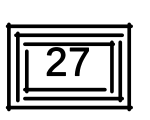
أن نوجد عدد الأعداد من أربع خانات ثم نوجد عدد الأعداد التي ليس في خاناتها العددان : ٢ ، ٣ ثم نطرح الناتجين من بعض فنحصل على الأعداد التي في خاناتها على الأقل : ٢ ، ٣ .

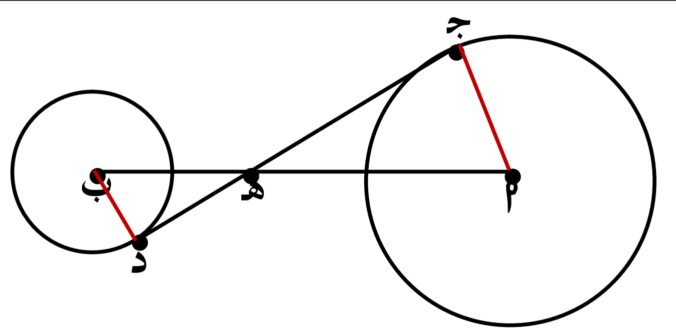
∴ عدد الأعداد من أربع خانات = ١٠ × ١٠ × ١٠ × ٩ = ٩٠٠٠ { الصفر ليس في الآلاف }

∴ عدد الأعداد من أربع خانات = ٨ × ٨ × ٨ × ٧ = ٣٥٨٤ { عندنا ثمان اختيارات في كل خانة ماعدا الآلاف فيها سبع اختيارات }

∴ عدد الأعداد التي في خاناتها على الأقل ٢ أو ٣ = ٩٠٠٠ - ٣٥٨٤ = ٥٤١٦

∴ الإجابة الصحيحة هي : هـ





أنصاف أقطار الدائرتين على التوالي ٨ ، ٣ ، المستقيمان : م ب ، جـ د يتقاطعان في النقطة : هـ حيث :

' ب هـ ' = ٥ ، المستقيم : جـ د يمس الدائرتين في النقطتين : جـ ، د كما هو موضح في الرسم ، فإن

طول : ' جـ د ' =

أ) ١٣	ب) $$	جـ) [٢١√٢]	د) [٢٥√٢]	هـ) %%

الحل :

∵ جـ د مماس للدائرة م ⇐ م جـ ⊥ جـ د { من العلاقة بين مماس الدائرة ونصف القطر }

∴ المثلث : م جـ هـ قائم الزاوية .

بالمثل : ب د ⊥ د جـ ⇐ المثلث ب د هـ قائم الزاوية ⇐ من فيثاغورث سنجد أن : ' د هـ ' = ٤سم

الآن :

المثلثان : م جـ هـ ، ب د هـ متشابهان لتطابق زاويتين { الزاوية القائمة و التقابل بالرأس }

∴ |i [| / |} i| = $\frac{8}{3}$ ⇐ |i [| / 4 = $\frac{8}{3}$ ⇐ |i [| = $\frac{32}{3}$

⇐ ' جـ د ' = ' جـ هـ ' + ' هـ د ' = $\frac{32}{3} + 4 = \frac{44}{3}$

∴ الإجابة الصحيحة هي : ب

28

إذا كانت : س < ٠ ، فإن : $\sqrt{1-\frac{s}{\frac{1-s}{s}}}$ =

أ- - س	ب- س	جـ- ١	د- $\sqrt{\frac{s}{٢}}$	هـ- س] -١ [

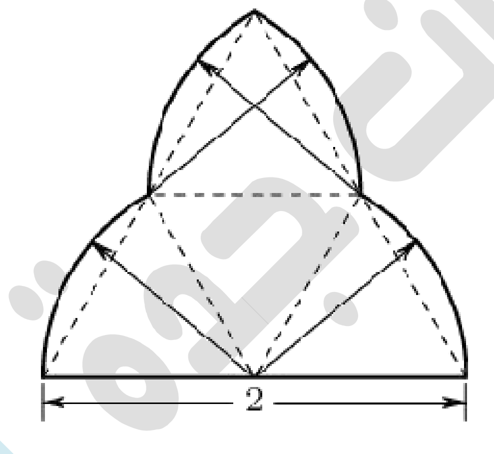
29

إذا كانت : أ ، ب جذور المعادلة : س@ - م س + ٢ = ٠ ، كذلك جذور المعادلة :

س@ - جـ س + هـ = ٠ هي : أ + $\frac{1}{F}$ ، F + $\frac{1}{أ}$ ، فإن قيمة : هـ =

أ- $\frac{5}{٢}$	ب- $\frac{7}{٢}$	جـ- ٤	د- $\frac{9}{٢}$	هـ- ٨

30



الشكل التالي يمثل ورقة البرسيم مكون من قطاعات دائرية مرسومه على أضلاع مثلثات متطابقة الأضلاع إذا كان طول قاعدة الورقة تساوي ٢سم كما هو موضح ، فإن مساحة الورقة =

أ- $\frac{'}{3}+\frac{\sqrt{3}}{٢}$	ب- $\frac{'٢}{3}$	جـ- $\frac{'٢}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}$	د- $\frac{'٢}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}$	هـ- $\frac{'٢}{3}+\frac{\sqrt{3}}{٢}$

28

إذا كانت : س > ٠ ، فإن : $\sqrt{\frac{s}{1-\frac{s-1}{s}}} =$

أ) - س	ب) س	جـ) ١	د) $\sqrt{\frac{s}{٢}}$	هـ) س [١- ا

الحل :

بتوحيد المقامات في المقام نجد أن :

$$1-\frac{s-1}{s} = \frac{s-s+1}{s} = \frac{1}{s}$$

الآن :

بإجراء عملية قسمة الكسور بين البسط والمقام :

$$s \div \frac{1}{s} = s \times \frac{s}{1} = s^{2}$$

$$\therefore \frac{s}{1-\frac{s-1}{s}} = \frac{s}{\frac{1}{s}} = s^{2} \Leftarrow \sqrt{s^{2}} = s$$

∴ الإجابة الصحيحة هي : ب

29

إذا كانت : أ ، ب جذور المعادلة : $س^2 - م س + ٢ = ٠$ ، كذلك جذور المعادلة :

$س^2 - ج س + هـ = ٠$ هي : $أ + \frac{1}{ب}$ ، $ب + \frac{1}{أ}$ ، فإن قيمة : هـ =

أ) $\frac{5}{٢}$	ب) $\frac{7}{٢}$	ج) ٤	د) $\frac{9}{٢}$	هـ) ٨

الحل :

∵ أ ، ب جذور المعادلة : $س^2 - م س + ٢ = ٠ \Leftarrow أ \times ب = ٢$

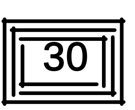
الآن :

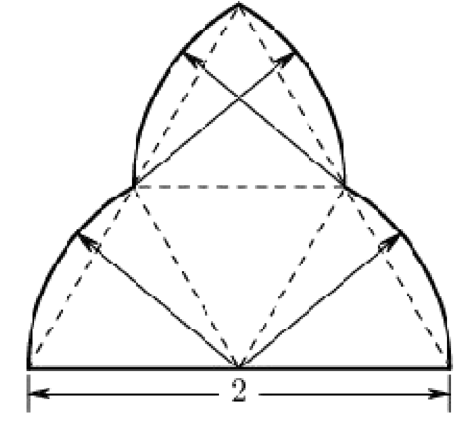
$$\therefore هـ = \left(أ + \frac{1}{ب}\right) \times \left(ب + \frac{1}{أ}\right) = \left(\frac{أب + 1}{ب}\right) \times \left(\frac{أب + 1}{أ}\right)$$

$$= \left(\frac{٢ + 1}{ب}\right) \times \left(\frac{٢ + 1}{أ}\right)$$

$$= \frac{3}{ب} \times \frac{3}{أ} = \frac{9}{أب} = \frac{9}{٢}$$

∴ الإجابة الصحيحة هي : د)





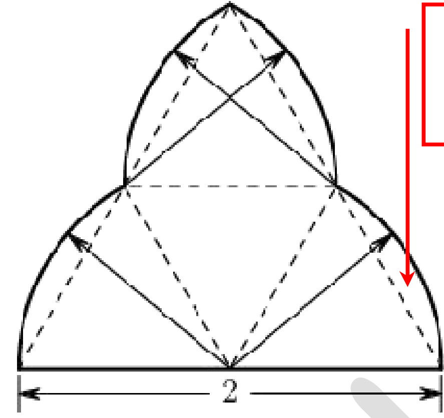
الشكل التالي يمثل ورقة البرسيم مكون من قطاعات دائرية مرسومه على أضلاع مثلثات متطابقة الأضلاع إذا كان طول قاعدة الورقة تساوي ٢سم كما هو موضح ، فإن مساحة الورقة =

أ) $\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$	ب) $\frac{2\pi}{3}$	جـ) $\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}$	د) $\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}$	هـ) $\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$

الحل :



فائدة :



مساحة القطعة الدائرية = ½ نق² { د - جـــا د } ، حيث :

نق : نصف القطر = ١ ، د : قياس الزاوية بالراديان = ٦٠°

الآن :

مساحة الشكل المقابل = مساحة أربع قطع دائرية + مساحة أربع مثلثات متطابقة ومتساوية الأضلاع .

∴ مساحة الشكل = ٤ × ½ × ١ $\{ \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \}$ + ٤ × $\frac{\sqrt{3}}{4}$ × ١ = $\frac{2\pi}{3}$

∴ الإجابة الصحيحة هي : ب

31

معامل : س) في مفكوك : { ١ + س + س@ + س# + س$ + س% }$ =

أ- ١٤٠	ب- ٢٢٠	جـ- ٨٠	د- ٢٢٥	هـ- ١٤٥

32

عدد الأعداد الصحيحة : س ، حيث : ١ ⩽ س ⩽ ٥٠٠ ، بشرط أن : ٥ لا يقسم : س ،

٦ لا يقسم : س ، ٨ لا يقسم : س ، تساوي :

أ- ٢٥٥	ب- ٢٩٩	جـ- ١٨٣	د- ٢٤٥	هـ- ٣٢٥

33

ب 1 2 1 أ

ثلاث أنصاف الدوائر نصف قطر الواحدة = ١سم ، على قطر نصف الدائرة الكبرى : أب ، التي نصف قطرها = ٢سم كما هو موضح في الشكل ، فإن مساحة الجزء المظلل يساوي :

أ- ' − √3	ب- ' − √٢	جـ- (' + √٢) / ٢	د- (' + √3) / ٢	هـ- 7'/6 − √3/٢

31

معامل : س في مفكوك : $\{ ١ + س + س^2 + س^3 + س^4 + س^5 \}^4 =$

أ) ١٤٠	ب) ٢٢٠	جـ) ٨٠	د) ٢٢٥	هـ) ١٤٥

الحل :

المقدار : $١ + س + س^2 + س^3 + س^4 + س^5$ ،

يمثل متسلسلة هندسية حدها الأول = ١ ، وأساسها = س ، ومجموعها $= \frac{س^6 - 1}{س - 1}$

$\therefore \{ ١ + س + س^2 + س^3 + س^4 + س^5 \}^4 = \frac{س^6 - 1}{س - 1} = \left(\frac{س^6 - 1}{س - 1}\right)^4$

$\Leftarrow \left(\frac{1 - س^6}{1 - س}\right)^4 = (1 - س^6)^4 \times (1 - س)^{-4}$

ولكن : $\{ ١ - س^6 \}^4 = ١ - ٤س^6 + ٦س^{12} - ٤س^{18} + س^{24}$ .... {١}

الآن : علاقة مهمة :

$(1 - س)^{-k} = \binom{k-1}{0} + \binom{k}{1} س + \binom{k+1}{2} س^2 + \binom{k+2}{3} س^3 + \cdots$ بشرط : ن ≥ ١

١) $(1 - س)^{-4} = 3 + 4س + 10س^2 + \cdots\cdots$ .... {٢}

الآن : نحاول أن نجمع المعاملات لــ س الناتجة من ضرب : { ١ } × { ٢ } ، وهي :

١ × معامل س من { ٢ } + { - ٤ س^6 } × معامل س^3 من { ٢ }

$\therefore$ معامل س $= 1 \times \binom{12}{9} - 4 \times \binom{6}{3} = 1 \times \binom{12}{3} - 4 \times \binom{6}{3}$

$= ٢٢٠ - ٨٠ = ١٤٠$

$\therefore$ الإجابة الصحيحة هي : أ

32

عدد الأعداد الصحيحة : س ، حيث : ١ ⩽ س ⩽ ٥٠٠ ، بشرط أن : ٥ لا يقسم : س ، ٦ لا يقسم : س ، ٨ لا يقسم : س ، تساوي :

أ- ٢٥٥	ب- ٢٩٩	جـ- ١٨٣	د- ٢٤٥	هـ- ٣٢٥

الحل :

علاقة مهمة : إذا كانت : سن = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ..... ، ن ' ، فإن :

عدد الأعداد التي تقبل القسمة على جـ ∋ سن = $\left\lfloor \frac{k}{[} \right\rfloor = i$ ، حيث :

هـ : "أكبر عدد صحيح أقل أو يساوي : $\frac{k}{[}$

كذلك ملاحظة :

نقول أن : جـ تقسم ن و م تقسم ن ⟺ المضاعف المشترك الأكبر لــ { جـ ، م } يقسم ن .

شرح طريقة الحل :

نحاول استنتاج الأعداد التي تقبل القسمة على ٥ ، ٦ ، ٨ وطرحها من ٥٠٠ فنستنتج العكس .

عدد الأعداد التي تقبل القسمة على ٥ = $\left\lfloor \frac{500}{5} \right\rfloor = 100$

عدد الأعداد التي تقبل القسمة على ٥ = $\left\lfloor \frac{500}{6} \right\rfloor = 83$

عدد الأعداد التي تقبل القسمة على ٥ = $\left\lfloor \frac{500}{8} \right\rfloor = 62$

الآن :

توجد أعداد تم حسابها مرتين أو ثلاث مثلاً : العدد ٣٠ يقبل القسمة على ٥ و ٦ فتم حسابه مرتين .

الفكرة :

نستنتج الأعداد التي تقبل القسمة على كل عددين مع بعضهما ونضيفه للناتج ، وفي هذه الحالة قد نضيف بعض الأعداد وهي تقبل القسمة على ٥ ، ٦ ، ٨ مثل ١٢٠ فنستنتج الأعداد التي تقبل القسمة على الثلاثة معاً ونطرحها من المجموع أيضاً .

∴ عدد الأعداد التي تقبل القسمة على ، و ٥ ، ٦ = $\left\lfloor \frac{500}{30} \right\rfloor = 16$

∴ عدد الأعداد التي تقبل القسمة على ، و ٥ ، ٨ = $\left\lfloor \frac{500}{40} \right\rfloor = 8$

∴ عدد الأعداد التي تقبل القسمة على ، و ٦ ، ٨ = $\left\lfloor \frac{500}{24} \right\rfloor = 20$

∴ عدد الأعداد التي تقبل القسمة على ، و ٥ ، ٦ ، ٨ = $\left\lfloor \frac{500}{120} \right\rfloor = 4$

∴ عدد الأعداد التي **لا تقبل القسمة** على : ٥ و ٦ و ٨ تساوي :

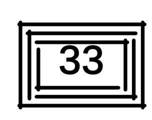
= ٥٠٠ - { ١٠٠ + ٨٣ + ٦٢ + ٤ } + { ١٦ + ١٢ + ٢٠ }

= ٥٠٠ - { ٢٥٩ } + { ٤٨ }

= ٢٥١ + { ٤٨ }

= ٢٩٩ عدداً

∴ الإجابة الصحيحة هي : ب



ثلاث أنصاف الدوائر نصف قطر الواحدة = ١سم ، على قطر نصف الدائرة الكبرى : أب ، التي نصف قطرها = ٢سم كما هو موضح في الشكل ، فإن مساحة الجزء المظلل يساوي :

أ) $\pi - \sqrt{3}$	ب) $\pi - \sqrt{2}$	جـ) $\frac{\pi + \sqrt{2}}{2}$	د) $\frac{\pi + \sqrt{3}}{2}$	هـ) $\frac{7\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

الحل :

واضح : من الرسم أن مساحة المنطقة غير المظللة مكونة من خمس قطاعات دائرية زاويتها المركزية = $\frac{\pi}{3}$ + مثلثين متطابقي الأضلاع .

تذكر : مساحة القطاع الدائري = $\frac{1}{2}$ نق^2 × د ، حيث : د : قياس الزاوي بالراديان .

الآن :

مساحة نصف الدائرة الكبرى = $\frac{1}{2}$ × ط × ٢^2 = ٢ط

مساحة نصفي خمس قطاعات دائرية = ٥ × $\frac{1}{2}$ × ١ × $\frac{\pi}{3}$ = $\frac{5\pi}{6}$

مساحة نصفي المثلثين = ٢ × $\frac{\sqrt{3}}{4}$ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

ولكن : مساحة المنطقة المظللة = مساحة نصف الدائرة الكبرى - مساحة المنطقة غير المظللة

= ٢ط - $\frac{5\pi}{6}$ - $\frac{\sqrt{3}}{2}$ = $\frac{7\pi}{6}$ - $\frac{\sqrt{3}}{2}$

∴ الإجابة الصحيحة هي : هـ

34

قيمة : س التي تحقق المعادلة : $25^{-٢} = \dfrac{(5)^{\frac{48}{\text{س}}}}{(5)^{\frac{26}{\text{س}}} \times (25)^{\frac{17}{\text{س}}}}$ تساوي :

أ- ٢	ب- ٣	جـ- ٥	د- ٦	هـ- ٩

35

إذا عرفنا الدالة : د { س } = مجموع خانات العدد س ، مثلاً : د{٥} = ٥ ، د{٧٦} = ١٣

د{٦٣٢} = ٦+٣+٢ = ١١ ، فإن عدد الأعداد التي من خانتين التي تحقق أن : د {د { س }} = ٣

، تساوي :

أ- ٣	ب- ٤	جـ- ٦	د- ٩	هـ- ١٠

36

في المستطيل : أ ب جـ د ، ' أ ب ' = ٥ ، ' ب جـ ' = ٣ ،

النقاط : هـ ، ن على الضلع جـ د حيث : ' جـ هـ ' = ٢ ،

' ن د ' = ١ ، فإن مساحة المثلث : أ م ب تساوي :

أ- ١٠	ب- $\frac{21}{٢}$	جـ- ١٢	د- $\frac{25}{٢}$	هـ- ١٥

34

قيمة : س التي تحقق المعادلة : $25^{-2} = \dfrac{(5)^{\frac{48}{s}}}{(5)^{\frac{26}{s}} \times (25)^{\frac{17}{s}}}$ تساوي :

أ- ٢	ب- ٣	جـ- ٥	د- ٦	هـ- ٩

الحل :

$$25^{-2} = \dfrac{(5)^{\frac{48}{s}}}{(5)^{\frac{26}{s}} \times (25)^{\frac{17}{s}}} \Leftarrow (5^{2})^{-2} = \dfrac{(5)^{\frac{48}{s}}}{(5)^{\frac{26}{s}} \times (5^{2})^{\frac{17}{s}}}$$

$$\Leftarrow 5^{-4} = \dfrac{(5)^{\frac{48}{s}}}{(5)^{\frac{26}{s}} \times (5)^{\frac{34}{s}}} \Leftarrow 5^{-4} = \dfrac{(5)^{\frac{48}{s}}}{(5)^{\frac{26}{s} + \frac{34}{s}}}$$

$$\Leftarrow 5^{-4} = \dfrac{(5)^{\frac{48}{s}}}{(5)^{\frac{60}{s}}} \Leftarrow 5^{-4} = (5)^{\frac{48}{s}} \times (5)^{-\frac{60}{s}} \Leftarrow 5^{-4} = (5)^{-\frac{12}{s}}$$

$$١ - \frac{12}{s} = -4 \Rightarrow s = \frac{-12}{-4} \Rightarrow s = 3$$

∴ الإجابة الصحيحة هي : ب

35

إذا عرفنا الدالة : د { س } = مجموع خانات العدد س ، مثلاً : د{٥} = ٥ ، د{٧٦} = ١٣

د{٢٣٦} = ٦+٣+٢ = ١١ ، فإن عدد الأعداد التي من خانتين التي تحقق أن : د {د { س }} = ٣

، تساوي :

أ- ٣	ب- ٤	جـ- ٦	د- ٩	هـ- ١٠

الحل :

∵ د { س } = مجموع خانات العدد س

أولا :

نبحث عن حلول المعادلة : د { س } = ٣ ، بشرط س من خانتين ، فنجد :

أن قيم س = ١٢ ، س = ٢١ ، س = ٣٠ ، لأن : د { ١٢} = ٣ ، وبالمثل البقية .

الآن :

نبحث عن القيم التي تحقق : د { د { س }} = ١٢ أو ٢١ أو ٣٠

لاحظ أن : د { د { س }} = ٢١ أو ٣٠ مستحيل لأن أعلى عدد من خانتين هو ٩٩ وحاصل جمع خاناته = ١٨ ، فنبحث فقط عن الحالة : د { د { س }} = ١٢ .

لماذا هذه القيم فقط ؟ لأنه عند التطبيق مرة أخرى سيكون حاصل جمع خانات ١٢ = ٣ .

∴ القيم التي تحقق هي : { ٣٩ ، ٩٣ ، ٤٨ ، ٨٤ ، ٥٧ ، ٧٥ ، ٦٦ }

∴ مجموعة حلول المعادلة هي : { ١٢ ، ٢١ ، ٣٠ ، ٣٩ ، ٩٣ ، ٤٨ ، ٨٤ ، ٥٧ ، ٧٥ ، ٦٦ }

∴ الإجابة الصحيحة هي : هـ

36

في المستطيل : أ ب جـ د ، ' أ ب ' = ٥ ، ' ب جـ ' = ٣ ،
النقاط : هـ ، ن على الضلع جـ د حيث : ' جـ هـ ' = ٢ ،
' ن د ' = ١ ، فإن مساحة المثلث : أ م ب تساوي :

أ~ ١٠	ب~ $\frac{21}{2}$	جـ~ ١٢	د~ $\frac{25}{2}$	هـ~ ١٥

الحل :

المثلثان : م هـ ن ، م ب أ متشابهان لتشابه ثلاث زوايا ⇐ نسبة التشابه = $\frac{2}{5}$

المثلث : ب جـ هـ قائم الزاوية فيه ' ب هـ ' = $\sqrt{13}$ ⇐ جا i = $\frac{3}{\sqrt{13}}$

الآن : من المثلثين : م هـ ن ، م ب أ نجد أن :

$\frac{|i l|}{|f l|} = \frac{2}{5}$ Ü $\frac{|i l|}{|f i| + |i l|} = \frac{2}{5}$ Ü $5|i l| = 2|i l| + 2|f i|$

Ü $3|i l| = 2|f i|$ Ü $|i l| = \frac{2}{3}|f i|$ Ü $|i l| = \frac{2}{3}\sqrt{13}$

∵ مساحة المثلث أي مثلث = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب ضلعين × جيب الزاوية بينهما

∵ مساحة المثلث : م هـ ن = $\frac{1}{2} \times 2 \times \frac{2}{3}\sqrt{13} \times$ جا هـ = $\frac{2}{3}\sqrt{13}$ ، $\frac{3}{\sqrt{13}}$ = ٢

مساحة $k i l$ / مساحة $f l$ = $\left(\frac{2}{5}\right)^2$ ⇐ مساحة $k i l$ / مساحة $f l$ = $\frac{4}{25}$ Ü مساحة $f l$ = $\frac{25}{4}$ ، ٢ = $\frac{25}{2}$

∴ الإجابة الصحيحة هي : د~

37

عدد الحلول الحقيقية للمعادلة : $36 = s^{-4} - 13s^{-2}$ تساوي :

أ- ٢	ب- ٣	جـ- ٥	د- ٦	هـ- ٩

38

عدد الأعداد الصحيحة التي تجعل المقدار : $\frac{k}{k - 20}$ مربعاً لعدد صحيحاً تساوي :

أ- ١	ب- ٢	جـ- ٣	د- ٤	هـ- ٥

39

المربع : أ ب جـ د ، طول ضلعه = ٢ رسمت بداخله نصف دائرة قطرها منطبق على ضلع المربع ــ كما هو موضح بالرسم ــ ، وتمس الضلع أ هـ كما في الرسم ، فإن ' أ هـ ' =

أ- $\frac{٢ + \sqrt{5}}{٢}$	ب- $\sqrt{5}$	جـ- $\sqrt{6}$	د- $\frac{5}{٢}$	هـ- $\sqrt{5}$

37

عدد حلول المعادلة : $13س^{-2} - س^{-4} = 36$ الحقيقية تساوي :

أ) ٠	ب) ١	ج) ٢	د) ٣	هـ) ٤

الحل :

نفرض : ص = $س^{-2}$ ⇐ تصبح المعادلة على الصورة :

$$13ص - ص^2 = 36 \Leftarrow ص^2 - 13ص + 36 = 0 \Leftarrow (ص - 4)(ص - 9) = 0$$

∴ جذور المعادلة : ص = ٤ ، ص = ٩ ، ولكن : ص = $س^{-2}$

$$\Leftarrow \frac{1}{س^2} = 4 \Leftarrow س^2 = \frac{1}{4} \Leftarrow س = \pm\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{س^2} = 9 \Leftarrow س^2 = \frac{1}{9} \Leftarrow س = \pm\frac{1}{3}$$

∴ الإجابة الصحيحة هي : هـ

38

عدد الأعداد الصحيحة التي تجعل المقدار : $\frac{k}{k - 20}$ مربعاً لعدد صحيحاً تساوي :

أ ~ ١	ب ~ ٢	جـ ~ ٣	د ~ ٤	هـ ~ ٥

الحل :

نفرض أن : ٱ² = $\frac{k}{k - 20}$ Ü 20ٱ² - kٱ² = k Ü 20ٱ² = kٱ² + k

Ü 20ٱ² = kٱ² + k Ü 20ٱ² = k(1 + ٱ²) Ü k = $\frac{20ٱ²}{1 + ٱ²}$

∴ حتى يكون المقدار عدداً صحيحاً يجب أن يكون المقام من عوامل البسط .

لاحظ أن : ٢٠ أ@ عدد يقبل القسمة على : ١ ، ٢ ، ٥ ، ١٠ لأنها قواسم العشرين .

∴ بمساواة المقام بهذه القواسم نجد أن :

عند : أ@ + ١ = ١ ⇐ أ@ = ٠ ⇐ ن = ٠

عند : أ@ + ١ = ٢ ⇐ أ@ = ١ ⇐ ن = ١٠

عند : أ@ + ١ = ٥ ⇐ أ@ = ٤ ⇐ ن = ١٦

عند : أ@ + ١ = ١٠ ⇐ أ@ = ٩ ⇐ ن = ١٨

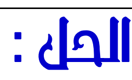
∴ قيم : ن = ٠ ، ١٠ ، ١٦ ، ١٨

∴ الإجابة الصحيحة هي : هـ

39

المربع : أ ب ج د ، طول ضلعه = ٢ رسمت بداخله نصف دائرة قطرها منطبق على ضلع المربع ــ كما هو موضح بالرسم ــ ، وتمس الضلع أ هـ كما في الرسم ، فإن |أ هـ| =

أ) $\frac{٢ + \sqrt{5}}{٢}$	ب) $\sqrt{5}$	ج) $\sqrt{6}$	د) $\frac{5}{٢}$	هـ) $\sqrt{5}$



الحل :

المثلثان : م ن هـ ، م ج هـ متطابقان فيهما :



|م ن| = |م ج| أنصاف أقطار لنصف الدائرة .



|م هـ| ضلع مشترك ، الزاويتان : ∠أ ن م ، ∠أ ب م زاويتنا قائمتان .



∴ |ن هـ| = |هـ ج|

المثلث : أ ب م قائم الزاوية من فيثاغورث نجد أن : |أ م| = $\sqrt{5}$

المثلث : أ ن م قائم الزاوية من فيثاغورث نجد أن : |أ ن| = ٢

نفرض أن : |ن هـ| = س ⇐ |ج هـ| = س ⇐ |د هـ| = ٢ - س

في المثلث : أ د هـ نجد أن : |أ هـ| = $\sqrt{٢^2 + (٢ - س)^2}$

ولكن : |أ هـ| = ٢ + س ⇐ (٢ + س)^2 = ٤ + ٤ - ٤س + س^2

⇐ ٤ + ٤س + س^2 = ٨ - ٤س + س^2 ⇐ ٨س = ٤ ⇐ س = $\frac{١}{٢}$ ∴ |أ هـ| = $\frac{٥}{٢}$

∴ الإجابة الصحيحة هي : د

40

أي من الأعداد التالية يمثل مربع كامل :

أ- ٩٨! × ٩٩!	ب- ٩٨! × ١٠٠!	جـ- ٩٩! × ١٠٠!	د- ٩٩! × ١٠١!	هـ- ١٠٠! × ١٠١!

41

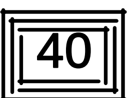
إذا كانت : $\{أ_{ن}\}$ متتالية صحيحة تحقق : $أ_{١} = ١$ ، $أ_{k+l} = أ_{l} + أ_{k} + kl$ لكل عدد صحيح : م ، ن ، فإن : $أ_{60} =$

أ- ١٨٣	ب- ١٥٦٠	جـ- ١٥٦	د- ١٨٣٠	هـ- ٧٢٠

42

الشبكة المربعة المقابلة مكونة من المربعات مقاس : ١ × ١ إلى ٥ × ٥ ، فإن عدد المربعات التي تحتوي المربع الأسود تساوي :

أ- ١٢	ب- ١٥	جـ- ١٧	د- ١٩	هـ- ٢٠



أي من الأعداد التالية يمثل مربع كامل :

أ- $98! \times 99!$	ب- $98! \times 100!$	جـ- $99! \times 100!$	د- $99! \times 101!$	هـ- $100! \times 101!$

الحل :

أ- $98! \times 99! = 98! \times 98! \times 99 = (98!)^2 \times 99$

ب- $98! \times 100! = 98! \times 98! \times 99 \times 100 = (98!)^2 \times 99 \times 100$

جـ- $99! \times 100! = 99! \times 99! \times 100 = (99!)^2 \times 100$

$= (99!)^2 \times 10^2 = (99! \times 10)^2$

∴ الفقرة : جـ تمثل مربع كامل .

∴ الإجابة الصحيحة هي : جـ

41

إذا كانت : $\{\text{أ}_{ن}\}$ متتالية صحيحة تحقق : $\text{أ}_{1} = 1$ ، $\text{أ}_{k+l} = \text{أ}_{l} + \text{أ}_{k} + kl$ لكل عدد صحيح : م ، ن ، فإن : $\text{أ}_{60} =$

أ- ١٨٣	ب- ١٥٦٠	ج- ١٥٦	د- ١٨٣٠	هـ- ٧٢٠

الحل :

$$\text{أ}_{60} = \text{أ}_{30+30} = \text{أ}_{30} + \text{أ}_{30} + 900 = 2\text{أ}_{30} + 900$$

ولكن :

$$2\text{أ}_{30} + 900 = 2\text{أ}_{15+15} + 900 = 2(\text{أ}_{15} + \text{أ}_{15} + 15\times15) + 900$$

$$= 4\text{أ}_{15} + 450 + 900 = 4\text{أ}_{15} + 1350 \cdots\cdots(1)$$

$$\text{أ}_{15} = \text{أ}_{12+3} = \text{أ}_{12} + \text{أ}_{3} + 12\times3 = \text{أ}_{12} + \text{أ}_{3} + 36$$

$$= \text{أ}_{6+6} + \text{أ}_{3} + 36 = \text{أ}_{6} + \text{أ}_{6} + 36 + \text{أ}_{3} + 36$$

$$= 2\text{أ}_{6} + \text{أ}_{3} + 72 = 2\text{أ}_{3+3} + \text{أ}_{3} + 72 = 2(\text{أ}_{3} + \text{أ}_{3} + 9) + \text{أ}_{3} + 72$$

$$= 4\text{أ}_{3} + 18 + \text{أ}_{3} + 72 = 5\text{أ}_{3} + 90 = 5\text{أ}_{2+1} + 90$$

$$= 5(\text{أ}_{2} + \text{أ}_{1} + 2) + 90 = 5(\text{أ}_{2} + 1 + 2) + 90 = 5\text{أ}_{2} + 15 + 90$$

$$= 5\text{أ}_{2} + 105 = 5\text{أ}_{1+1} + 105 = 5\text{أ}_{1} + 5\text{أ}_{1} + 5 + 105 = 120 \cdots\cdots(2)$$

بالتعويض بقيمة : أ_{15} من { ٢ } في { ١ } نجد أن :

$$\text{أ}_{60} = 4\times120 + 1350 = 1830$$

طريقة أخرى :

بفك المتباينة : { $م_ن$ ' نلاحظ أن حدودها تأخذ الصورة : { ١ ، ٣ ، ٦ ، ١٠ ، ...... }

نجد أن :

حدود المتتالية تعرف بالعدد المثلثي ويعرف على أنه مجموع أول ن حداً من الأعداد الصحيحة الموجبة

وصورتها العامة : $أ_k = \frac{k(k+1)}{٢}$

١ $أ_{60} = \frac{60 \times (60+1)}{٢} = 1830$

∴ الإجابة الصحيحة هي : د~

42

الشبكة المربعة المقابلة مكونة من المربعات مقاس : ١ × ١ إلى ٥ × ٥ ، فإن عدد المربعات التي تحتوي المربع الأسود تساوي :

أ- ١٢	ب- ١٥	جـ- ١٧	د- ١٩	هـ- ٢٠

الحل :

نلاحظ أن المربعات مقسمة إلى خمسة أنواع :

١ × ١ ، ٢ × ٢ ، ٣ × ٣ ، ٤ × ٤ ، ٥ × ٥

عدد المربعات من النوع : ١ × ١ التي تحوي المربع الأسود = ١

عدد المربعات من النوع : ٢ × ٢ التي تحوي المربع الأسود = ٤

عدد المربعات من النوع : ٣ × ٣ التي تحوي المربع الأسود = ٩

عدد المربعات من النوع : ٤ × ٤ التي تحوي المربع الأسود = ٤

عدد المربعات من النوع : ٥ × ٥ التي تحوي المربع الأسود = ١

∴ عدد المربعات التي تحوي المربع الأسود = ١٩

∴ الإجابة الصحيحة هي : د-

43

العدد : $(25)^{64}$ ، $(64)^{25}$ يمثل مربع العدد : أ ، فإن مجموع خانات العدد : أ =

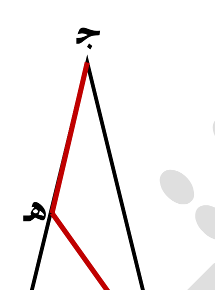
أ- ٧	ب- ١٤	ج- ٢١	د- ٢٨	هـ- ٣٥

44

قيمة : ك التي تجعل المعادلة : $\frac{س - 1}{س - ٢} = \frac{س - ك}{س - 6}$ ليس لها حلاً بالنسبة لـ س تساوي :

أ- ١	ب- ٢	ج- ٣	د- ٤	هـ- ٥

45



المثلث : أ ب ج متطابق الضلعين فيه : ' أ ج ' = ' ب ج '

النقطتان : هـ ، د تقعان على الضلعين : أ ج ، ب ج بالترتيب . حيث :

' أ ب ' = ' أ د ' = ' د هـ ' = ' هـ ج '

، فإن قياس الزاوية : أ [ب ب يساوي :

أ- $٢٥ \frac{٥}{٧}$°	ب- $٢٦ \frac{١}{٣}$°	ج- ٣٠°	د- ٣٥°	هـ- ٤٠°

43

العدد : $(25)^{64} \times (64)^{25}$ يمثل مربع العدد : م ، فإن مجموع خانات العدد : م =

أ- ٧	ب- ١٤	جـ- ٢١	د- ٢٨	هـ- ٣٥

الحل :

$$م^2 = (25)^{64} \times (64)^{2525}$$

$$= (5^2)^{64} \times (2^6)^{25}$$

$$= (5)^{128} \times (2)^{150}$$

$$\therefore م = (5)^{64} \times (2)^{75} \quad \therefore م = (5)^{64} \times (2)^{64} \times (2)^{11}$$

$$= (5 \times 2)^{64} \times (2)^{11}$$

$$= (10)^{64} \times (2)^{11}$$

$$\therefore م = (10)^{64} \times 2048$$

∴ مجموع خانات العدد : م = ١٤

∴ الإجابة الصحيحة هي : ب

44

قيمة : ك التي تجعل المعادلة : $\frac{س - 1}{س - 2} = \frac{س - ك}{س - 6}$ ليس لها حلاً بالنسبة لــ س تساوي :

أ- ١	ب- ٢	جـ- ٣	د- ٤	هـ- ٥

الحل :

$\frac{س - 1}{س - 2} = \frac{س - ك}{س - 6} \Leftarrow س^2 - 7س + 6 = س^2 - 2س - ك(س - 2)$

$\Leftarrow -5س + 6 = -ك(س - 2)$

$\Leftarrow 5س + 6 = ك س - 2ك$

$\Leftarrow 5س - ك س = -6 - 2ك$

$\Leftarrow س(5 - ك) = -6 - 2ك$

$\Leftarrow س = \frac{-6 - 2ك}{5 - ك}$

$\Leftarrow س = \frac{2ك + 6}{ك - 5}$

∴ واضح الآن أن المعادلة ليس لها حل عندما : ك = ٥

∴ الإجابة الصحيحة هي : هـ

45

المثلث : ٱ ب ج متطابق الضلعين فيه : ' ٱ ج ' = ' ب ج '

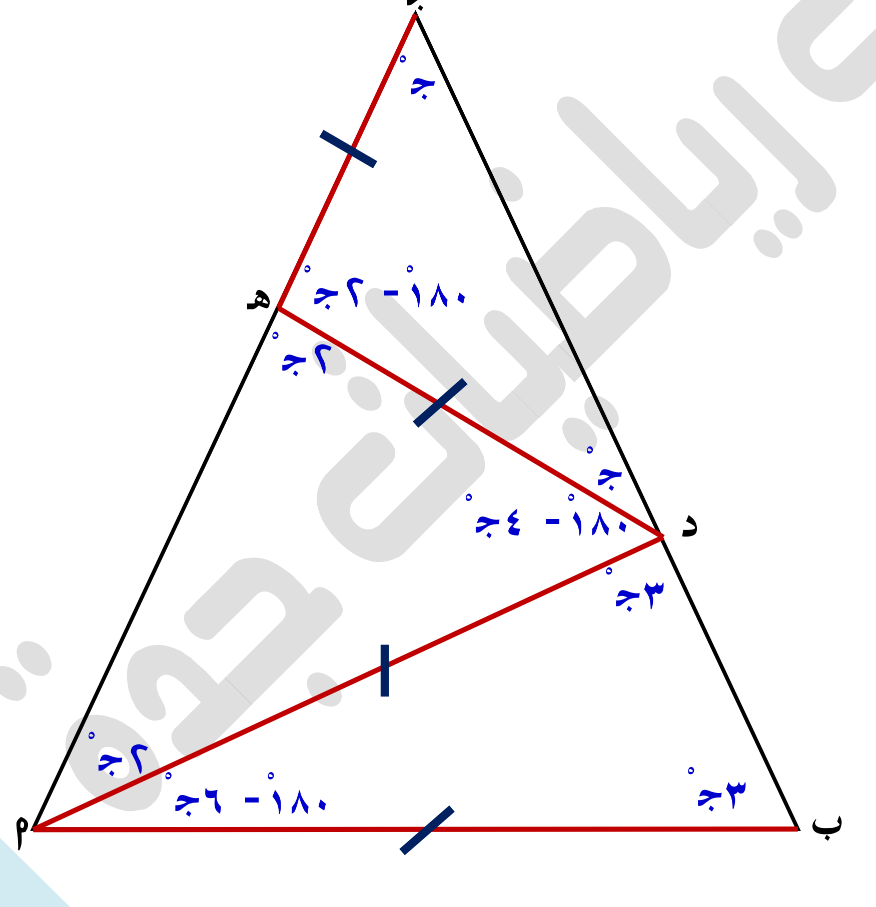
النقطتان : ه ، د تقعان على الضلعين : ٱج ، ب ج بالترتيب . حيث :

' ٱ ب ' = ' ٱ د ' = ' د ه ' = ' ه ج '

، فإن قياس الزاوية : [ٱ ب] ب يساوي :

ٱ~ $\frac{٥}{٧}$ ٢٥°	ب~ $\frac{١}{٣}$ ٢٦°	ج~ ٣٠°	د~ ٣٥°	ه~ ٤٠°

الحل :



إثبات بدون كلام :

٣ج = ١٨٠ - ٦ج + ٢ج

⇐ ٣ج = ١٨٠ - ٤ج

⇐ ٧ج = ١٨٠

⇐ ج = $\frac{180}{7}$

⇐ ج = $\frac{٥}{٧}$ ٢٥

∴ الإجابة الصحيحة هي : ٱ~

46

مصنعان لصناعة المفاتيح الكهربائية الأول ينتج : ٧% مفاتيح غير صالحة ، والثاني ينتج ١٠% مفاتيح غير سليمة ، إذا كان المصنع الثاني ينتج ثلاثة أمثال المصنع الأول في أسبوع واحد ، اختير مفتاح عشوائياً ، فإن احتمال أن يكون المفتاح سليم يساوي :

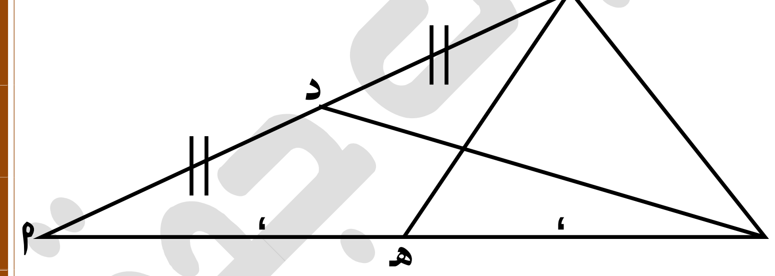
أ- $\frac{17}{100}$	ب- $\frac{363}{400}$	جـ- $\frac{7}{37}$	د- $\frac{7}{100}$	هـ- $\frac{1}{10}$

47

قيمة المحددة : △ = $\begin{vmatrix} s & s & w+s \\ s؟ & s4 & w4+s5 \\ s3 & s8 & w8+s10 \end{vmatrix}$ تساوي :

أ- صفر	ب- س + ٢ ص	جـ- ٢ س	د- س	هـ- س#

48



في المثلث : أ ب جـ ، القطعتان : جـ هـ ، ب د متوسطات حيث :' جـ هـ' = ٨سم ، ' ب د ' = ١٢ سم ، فإن مساحة المثلث : أ ب جـ تساوي :

أ- ٢٤	ب- ٣٢	جـ- ٤٨	د- ٦٤	هـ- ٩٦

46

مصنعان لصناعة المفاتيح الكهربائية الأول ينتج : ٧% مفاتيح غير صالحة ، والثاني ينتج ١٠% مفاتيح غير سليمة ، إذا كان المصنع الثاني ينتج ثلاثة أمثال المصنع الأول في أسبوع واحد ، اختير مفتاح عشوائي ، فإن احتمال أن يكون المفتاح سليم يساوي :

أ- $\frac{17}{100}$	ب- $\frac{363}{400}$	جـ- $\frac{7}{37}$	د- $\frac{7}{100}$	هـ- $\frac{1}{10}$

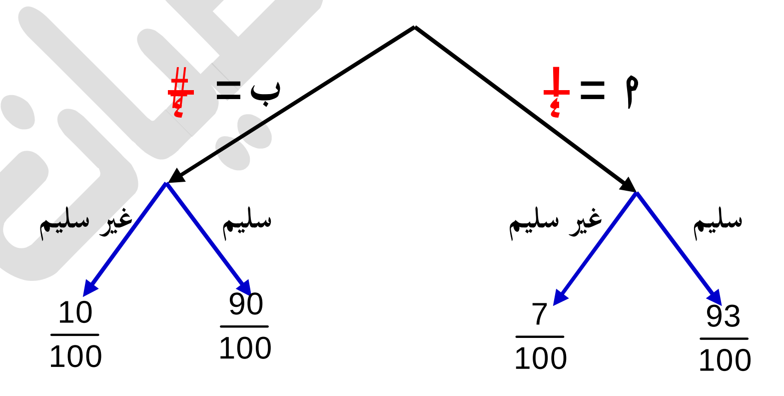
الحل :

نفرض : أ : المصنع الأول ، ب : المصنع الثاني

تذكير : ح{ أ } + ح{ ب } = ١ ∵ إنتاج : ب ثلاثة أمثال : أ

⇐ ح{ب} = ٣ ح{ أ } ⇐ ح{ أ } + ٣ح{ أ } = ١ ⇐ ٤ ح{ أ } = ١

⇐ ح{ أ } = ¼ ⇐ ح{ب} = ¾



الآن : الاختيار لمفتاح سليم سيكون من المصنع الأول أو الثاني :

∴ احتمال مفتاح سليم = $\frac{1}{4} \times \frac{93}{100} + \frac{3}{4} \times \frac{90}{100} = \frac{363}{400}$

∴ الإجابة الصحيحة هي : ب

47

قيمة المحددة : $\triangle = \begin{vmatrix} س & س & س + ص \\ ٢س & ٤س & ٥س + ٤ص \\ ٣س & ٨س & ١٠س + ٨ص \end{vmatrix}$ تساوي :

أ- صفر	ب- س + ٢ص	جـ- ٢س	د- س	هـ- س#

الحل :

نستخدم خصائص المحددات :

بضرب الصف الثاني × - ٢ وجمعه مع الصف الثالث نجد أن :

$$\triangle = \begin{vmatrix} س & س & س + ص \\ ٢س & ٤س & ٥س + ٤ص \\ ٣س & ٨س & ١٠س + ٨ص \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} س & س & س + ص \\ -س & ٠ & ٠ \\ ٣س & ٨س & ١٠س + ٨ص \end{vmatrix}$$

بتبديل الصفين الأول والثاني :

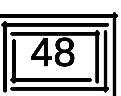
$$\triangle = - \begin{vmatrix} -س & ٠ & ٠ \\ س & س & س + ص \\ ٣س & ٨س & ١٠س + ٨ص \end{vmatrix}$$

بالقانون العام مع ملاحظة قسمة الناتج على - ٢ :

$$\triangle = س \begin{vmatrix} س & س + ص \\ ٨س & ١٠س + ٨ص \end{vmatrix} = س \left[(١٠س^٢ + ٨سص) - (٨س^٢ + ٨سص) \right]$$

$$= س \times -٢س^٢ = -٢س^٣ = س^٣$$

∴ الإجابة الصحيحة هي : هـ



في المثلث : ٢ ب جـ ، القطعتان : جـ هـ ، ب د

متوسطات حيث : ' جـ هـ ' = ٨سم ،

' ب د ' = ١٢ سم ، فإن مساحة المثلث : ٢ ب جـ تساوي :

أ~ ٢٤	ب~ ٣٢	جـ~ ٤٨	د~ ٦٤	هـ~ ٩٦

الحل :

∵ جـ هـ ، ب د متوسطات ⇐ متعامدان { من خصائص المتوسطات }

كذلك :

من خصائص المتوسط: نسبة نقطة التقاء المتوسطات عن رأسي المتوسط = ١ : ٣

∴ $\frac{2}{3}$ ' ب د ' = ' ب ن ' ⇐ ' ب ن ' = ٨

∴ في المثلث : ب جـ هـ الضلع : ب ن يمثل ارتفاع و جـ هـ قاعدته

⇐ مساحته = $\frac{1}{2}$ × ٨ × ٨ = ٣٢ سم٢

الآن :

لاحظ أن المثلثين : ب جـ هـ ، ٢ جـ هـ لهما قاعدتان متساويتان : ' ٢ هـ ' = ' هـ ب '

ولهما ارتفاع واحد وذلك عند إنزال عمودي من الرأس جـ على الضلع ٢ ب

∴ أكيد لهما نفس المساحة ، ∵ مساحة : ب جـ هـ = ٣٢ ⇐ مساحة : ٢ جـ هـ = ٣٢

⇐ مساحة المثلث : ٢ ب جـ = مساحتي { ب جـ هـ + ٢ جـ هـ } = ٣٢ + ٣٢ = ٦٤ سم٢

∴ الإجابة الصحيحة هي : د~

49

إذا كانت : أ = { ٢٠٠٨ }@ + { ٢ }*((@ ، فإن خانة الآحاد في العدد : أ@ + ٢ ^أ^ تساوي :

أ- صفر	ب- ٢	جـ- ٤	د- ٦	هـ- ٨

50

افرض أن الدالة : د { س } = س# + أ س@ + ب س + جـ = ٠ ، حيث : أ ، ب ، جـ

أعداد مركبة تحقق أن : د { ٢٠٠٩ + ٩٠٠٢ ت } = د { ٢٠٠٩ } = د { ٩٠٠٢ } = ٠ ،

فإن عدد الجذور المركبة للمعادلة : د { س } = س@! + أ س* + ب س$ + جـ = ٠ تساوي :

أ- ٤	ب- ٦	جـ- ٨	د- ١٠	هـ- ١٢

51

الدائرة : م تمس ضلعي المثلث : أ ب جـ ، القائم الزاوية في جـ حيث قطراها يقطعا ضلعي المثلث في نقطة التماس كما هو موضح في الرسم ، فإذا كان طول الضلع : ب جـ = ٦سم ، فإن مساحة الجزء المظلل تساوي :

أ- ط	ب- ط - ٢	جـ- ٢ط	د- ط - ٤	هـ- ٤ط

49

إذا كانت : $أ = (٢٠٠٨)^{٢} + (٢)^{٢٠٠٨}$ ، فإن خانة الآحاد في العدد : $أ^{٢} + ٢^{أ}$ تساوي :

أ- صفر	ب- ٢	جـ- ٤	د- ٦	هـ- ٨

الحل :

البداية : نوجد رقم الآحاد في العدد : أ كالتالي :

آحاد العدد : $(٢٠٠٨)^{٢} = ٢٠٠٨ \times ٢٠٠٨$ = آحاد : $٨ \times ٨ = ٦٤$ ⇐ الآحاد = ٤

آحاد العدد : $(٢)^{٢٠٠٨}$: نلاحظ أن آحاد العدد : ٢ له أربع حالات كالتالي :

$٢^{١} = ٢$ ، $٢^{٢} = ٤$ ، $٢^{٣} = ٨$ ، $٢^{٤} = ١٦$ ، $٢^{٥} = ٣٢$

∴ آحاد العدد : $٢^{ن} = ٢$ أو ٤ أو ٨ أو ٦ ثم يتكرر كل أربع مرات بصورة دورية .

∴ بقسمة الأس على : ٤ نجد أن : $٢٠٠٨ \div ٤ = ٥٠٢$ ⇐ الآحاد = ٦

طريقة أخرى : $(٢)^{٢٠٠٨} = (٢^{٤})^{٥٠٢} = (١٦)^{٥٠٢}$ ⇐ الآحاد = ٦ لأن دوماً $٦^{ن}$ آحاده يساوي : ٦ .

∴ آحاد العدد : أ = آحاد العدد : $(٢٠٠٨)^{٢}$ + آحاد العدد : $(٢)^{٢٠٠٨} = ٤ + ٦ = ١٠$

⇐ الآحاد = صفر .

الآن :

نوجد آحاد العدد : $أ^{٢} + ٢^{أ}$ كالتالي :

أولاً :

نوجد آحاد العدد : م@ بما أن : م آحاده يساوي الصفر ⇐ أي عدد آحاده صفراً مرفوع لأي قوة ، فإن الآحاد يساوي الصفر ⇐ آحاد : م@ = صفراً .

ثانياً :

نوجد آحاد : $٢^{م}$ كالتالي :

$$٢^{(2008)^{٢} + (٢)^{2008}} = ٢^{(1004 \times ٢)^{٢} + (٢)^{2006} \times ٢^{٢}} = ٢^{4 \times (1004)^{٢} + (٢)^{2006} \times 4}$$

$$= ٢^{4 \times \left[(1004)^{٢} + (٢)^{2006}\right]} = \left(٢^{4}\right)^{\left[(1004)^{٢} + (٢)^{2006}\right]}$$

$$= (16)^{\left[(1004)^{٢} + (٢)^{2006}\right]}$$

وآحاد العدد : ٦ دائماً = ٦ ⇐ آحاد العدد : $٢^{م}$ = ٦

∴ آحاد العدد : م@ + $٢^{م}$ = آحاد : م@ + آحاد : $٢^{م}$ = ٠ + ٦ = ٦ .

∴ الإجابة الصحيحة هي : د~

50

افرض أن الدالة : د { س } = س# + م س@ + ب س + جـ = ٠ ، حيث : م ، ب ، جـ
أعداد مركبة تحقق أن : د { ٢٠٠٩ + ٩٠٠٢ ط ت } = د { ٢٠٠٩ } = د { ٩٠٠٢ } = ٠ ،
فإن عدد الجذور المركبة للمعادلة : د { س } = س@! + م س* + ب س$ + جـ = ٠ تساوي :

م~ ٤	ب~ ٦	جـ~ ٨	د~ ١٠	هـ~ ١٢

الحل :

∵ د { س } = س# + م س@ + ب س + جـ = ٠

⇐ د { س$ } = س@! + م س* + ب س# + جـ = ٠

∵ د { ٢٠٠٩ + ٩٠٠٢ ط ت } = د { ٢٠٠٩ } = د { ٩٠٠٢ } = ٠

⇐ الأعداد : { ٢٠٠٩ + ٩٠٠٢ ط ت } ، { ٢٠٠٩ } ، د { ٩٠٠٢ } :

تمثل جذوراً للدالة : د { س } .

0= (9002 - s)(2009 - s)((J '9002 - 2009) - s) = (s)} \

0= (9002 - ^{4}s)(2009 - ^{4}s)((J '9002 - 2009) - ^{4}s) = (^{4}s)} Ü

الآن :

J '9002 - 2009 = ^{4}s Ü 0 = (J '9002 - 2009) - ^{4}s : إما

الحظ :

العدد مركب والمجهول من الدرجة الرابعة ⇐ ستكون لدينا أربعة جذور مركبة .

أو : $s^4 - (2009) = 0 \Rightarrow s^4 = 2009 \Rightarrow s^2 = \pm\sqrt{2009}$

من الجذر السالب سنجد أن :

$s^2 = -\sqrt{2009} \Rightarrow s = \pm\sqrt{-\sqrt{2009}} \Rightarrow s = \pm i\sqrt{\sqrt{2009}}$

∴ لدينا جذران مركبان .

بالمثل :

$s^4 - (9002) = 0 \Rightarrow s^4 = 9002 \Rightarrow s^2 = \pm\sqrt{9002}$

$\Rightarrow s^2 = -\sqrt{9002} \Rightarrow s = \pm\sqrt{-\sqrt{9002}}$

$\Rightarrow s = \pm i\sqrt{\sqrt{9002}}$

∴ لدينا جذران مركبان .

⇐ عدد الجذور المركبة للمعادلة = ثمانية جذور .

∴ الإجابة الصحيحة هي : جـ

51

الدائرة : م تمس ضلعي المثلث : أ ب جـ ، القائم الزاوية في جـ حيث قطراها يقطعا ضلعي المثلث في نقطة التماس كما هو موضح في الرسم ، فإذا كان طول الضلع : ' ب جـ ' = ٦سم ، فإن مساحة الجزء المظلل تساوي :

هـ) ٤ط	د) ط - ٤	جـ) ٢ط	ب) ط - ٢	أ) ط

الحل :

م ك ، م ع نصفا قطر الدائرة عموديان على ضلعي المثلث

⇐ الشكل : م ك جـ ع يمثل مربع .

بالمثل : م هـ ء ك يمثل مربع ⇐ ' جـ ك ' = ' ك ء '

كذلك : م ن ، م هـ نصفا قطر في الدائرة متعامدان

⇐ الشكل : م ن هـ مثلث قائم الزاوية .



∵ ن ، هـ ∈ أ ب ⇐ المثلث : م ن هـ يشابه المثلث : أ ب جـ قائما الزاوية والقاعدتان متوازيتان .

∴ ' م ن ' = ' م هـ ' ⇐ ' أ جـ ' = ' جـ ب ' .

الآن : المثلث : هـ ء ب قائم الزاوية حيث : ء صورة هـ على ب جـ ⇐ المثلث : هـ ء ب يشابه المثلث : أ ب جـ ⇐ ' هـ ء ' = ' ء ب ' ، لأن : أ ب جـ متطابق الضلعين .

∴ ' جـ ك ' = ' ك ء ' = ' ء ب ' = نو ⇐ ' ب جـ ' = ٣ نو ⇐ نو = ٢

∵ مساحة القطعة الدائرية = ½ نو٢ { د - جــا د } ، حيث :

⇐ مساحة القطعة الدائرية = ط - ٢

∴ الإجابة الصحيحة هي : ب

52

إذا كانت : ؟ تمثل مجموع تسعة حدود من المتتابعة :

س + ب ، س@ + ٢ب ، س# + ٣ب ، .... ، فإن قيمة : ؟ =

أ	ب	ج	د	هـ
$\frac{s^{8}+s+f50}{1+s}$	$f50-\frac{s^{10}+s}{1-s}$	$f45+\frac{s^{9}-s}{1+s}$	$f45+\frac{s^{10}-s}{1-s}$	$f45+\frac{s^{11}-s}{1-s}$

53

جتا $\left(\frac{'}{7}\right)$ × جتا $\left(\frac{'٢}{7}\right)$ × جتا $\left(\frac{'4}{7}\right)$ =

أ	ب	ج	د	هـ
$\frac{1}{7}$	$\frac{٢}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{٢}$

54

في المثلث : ؟ ب ج ، إذا كان : $\frac{1}{٢}$ جا؟ = $\frac{1}{3}$ جاب = $\frac{1}{4}$ جا [، فإن : جتا [=

أ	ب	ج	د	هـ
$\frac{1}{٢}$	$-\frac{1}{٢}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$

52

إذا كانت : م تمثل مجموع تسعة حدود من المتتابعة :

س + ب ، س@ + ٢ب ، س# + ٣ب ، .... ، فإن قيمة : م =

أ	ب	جـ	د	هـ
$\frac{^{8}s+s+f50}{1+s}$	$\frac{^{10}s+s}{1-s}-f50$	$\frac{s-{}^{9}s}{1+s}+f45$	$\frac{s-{}^{10}s}{1-s}+f45$	$\frac{s-{}^{11}s}{1-s}+f45$

الحل :

ممكن نعيد كتابة المقدار على الصورة :

{ س + س@ + س# + س$ + ... + س) } + { ب + ٢ب + ٣ب + ... + ٩ب }

الآن :

نلاحظ أن القوس الأول يمثل متسلسلة هندسية فيها :

الحد الأول = س ، وأساسها = س ، وعدد حدودها = ٩ ، ومجموعها = $\frac{s\,(^{9}s-1)}{s-1}$

كذلك نلاحظ أن القوس الثاني يمثل متسلسلة حسابية فيها :

الحد الأول = ب ، وأساسها = ب ، وعدد حدودها = ٩ ، ومجموعها = ٤٥ب

∴ مجموع تسعة حدود من المتسلسلة = $f45+\frac{s-{}^{10}s}{1-s}$

∴ الإجابة الصحيحة هي : د

53

$\text{جتا}\left(\frac{\pi}{7}\right) \times \text{جتا}\left(\frac{2\pi}{7}\right) \times \text{جتا}\left(\frac{4\pi}{7}\right) =$

أ) $\frac{1}{7}$	ب) $\frac{2}{7}$	جـ) $-\frac{1}{7}$	د) $-\frac{1}{8}$	هـ) $\frac{1}{2}$

الحل :

بالضرب بسطاً ومقاماً في $\text{جا}\left(\frac{\pi}{7}\right)$ والاستفادة من قانون ضعف الزاوية للـــ جا ا نجد أن :

$$\frac{\text{جا}\left(\frac{\pi}{7}\right)\text{جتا}\left(\frac{\pi}{7}\right) \times \text{جتا}\left(\frac{2\pi}{7}\right) \times \text{جتا}\left(\frac{4\pi}{7}\right)}{\text{جا}\left(\frac{\pi}{7}\right)} = \frac{\frac{1}{2}\text{جا}\left(\frac{2\pi}{7}\right) \times \text{جتا}\left(\frac{2\pi}{7}\right) \times \text{جتا}\left(\frac{4\pi}{7}\right)}{\text{جا}\left(\frac{\pi}{7}\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}\text{جا}\left(\frac{4\pi}{7}\right) \times \text{جتا}\left(\frac{4\pi}{7}\right)}{\text{جا}\left(\frac{\pi}{7}\right)} = \frac{\frac{1}{8}\text{جا}\left(\frac{8\pi}{7}\right)}{\text{جا}\left(\frac{\pi}{7}\right)}$$

الآن : باستخدام قوانين التبسيط نجد أن :

$$\frac{\frac{1}{8}\text{جا}\left(\frac{8\pi}{7}\right)}{\text{جا}\left(\frac{\pi}{7}\right)} = \frac{\frac{1}{8}\text{جا}\left(\frac{\pi}{7} + \pi\right)}{\text{جا}\left(\frac{\pi}{7}\right)} = \frac{-\frac{1}{8}\text{جا}\left(\frac{\pi}{7}\right)}{\text{جا}\left(\frac{\pi}{7}\right)} = -\frac{1}{8}$$

∴ الإجابة الصحيحة هي : د

54

في المثلث : أ ب جـ ، إذا كان : $\frac{1}{2}$ جا أ $=$ $\frac{1}{3}$ جا ب $=$ $\frac{1}{4}$ جا جـ ، فإن : جتا جـ $=$

أ) $\frac{1}{2}$	ب) $-\frac{1}{2}$	جـ) $\frac{1}{4}$	د) $-\frac{1}{4}$	هـ) $\frac{1}{3}$

الحل :

$\because$ $\frac{1}{2}$ جا أ $=$ $\frac{1}{3}$ جا ب $=$ $\frac{1}{4}$ جا جـ $\Leftarrow$ $\frac{\text{جا أ}}{2} = \frac{\text{جا ب}}{3} = \frac{\text{جا جـ}}{4}$

وهو معكوس قاعدة الجيوب $\Leftarrow$ أطوال أضلاع المثلث $=$ ٢ ، ٣ ، ٤

الآن :

من قاعدة الجيوب :

جتا (جـ°) $= \frac{\text{أ}^2 + \text{ب}^2 - \text{جـ}^2}{2\,\text{أ}\,\text{ب}}$ ، حيث : أ ، ب ، جـ أطوال أضلاع المثلث .

$\therefore$ جتا (جـ°) $= \frac{\text{أ}^2 + \text{ب}^2 - \text{جـ}^2}{2\,\text{أ}\,\text{ب}} = \frac{2^2 + 3^2 - 4^2}{2 \times 2 \times 3} = -\frac{1}{4}$

$\therefore$ الإجابة الصحيحة هي : د

55

عدد القيم الحقيقية التي تحقق المعادلة : $\frac{(27)^{s} + (8)^{s}}{(12)^{s} + (18)^{s}} = \frac{7}{6}$ تساوي :

أ- ١	ب- ٢	جـ- ٣	د- ٤	هـ- ٥

56

قيمة المقدار : $\sqrt{9 - ٢\sqrt{23 - 6\sqrt{10 + 4\sqrt{3 - ٢\sqrt{٢}}}}}$ تساوي :

أ- $\sqrt{٢} + 1$	ب- $\sqrt{3} + 1$	جـ- $\sqrt{٢} - 1$	د- $\sqrt{3} - 1$	هـ- $\sqrt{3}$

57

إذا كان : $\sqrt[4]{أ} - \frac{1}{\sqrt[4]{أ}} = 14$ ، فإن : $\sqrt[6]{أ} + \frac{1}{\sqrt[6]{أ}} =$

أ- ٢	ب- ٤	جـ- ٦	د- ٨	هـ- ١٢

55

عدد القيم الحقيقية التي تحقق المعادلة : $\frac{^{s}(27)+^{s}(8)}{^{s}(12)+^{s}(18)} = \frac{7}{6}$ تساوي :

أ- ١	ب- ٢	جـ- ٣	د- ٤	هـ- ٥

الحل :

$$\frac{^{s}(27)+^{s}(8)}{^{s}(12)+^{s}(18)} = \frac{7}{6} \quad Û \quad \frac{^{s3}(3)+^{s3}(٢)}{^{s}(٢´6)+^{s}(3´6)} = \frac{7}{6}$$

$$Û \quad \frac{\left(^{s٢}(3)+^{s}(6)-^{s٢}(٢)\right)\left(^{s}(3)+^{s}(٢)\right)}{\left(^{s}(٢)+^{s}(3)\right)´\,^{s}(6)} = \frac{7}{6}$$

$$Û \quad \frac{\left(^{s٢}(3)+^{s}(6)-^{s٢}(٢)\right)}{^{s}(6)} = \frac{7}{6}$$

$$Û \quad \frac{\left(^{s}(9)+^{s}(6)-^{s}(4)\right)}{^{s}(6)} = \frac{7}{6}$$

$$Û \quad ^{s}\left(\frac{3}{٢}\right)+1-\,^{s}\left(\frac{٢}{3}\right) = \frac{7}{6}$$

$$Û \quad ^{s}\left(\frac{3}{٢}\right)+\,^{s}\left(\frac{٢}{3}\right) = \frac{13}{6}$$

الآن : بفرض : $أ = \,^{s}\left(\frac{٢}{3}\right)$ تصبح المعادلة على الصورة : $أ + \frac{1}{أ} = \frac{13}{6}$

ومنه نجد أن : $\frac{1+أ^{٢}}{أ} = \frac{13}{6} \quad Ü \quad 6أ^{٢} - 13أ + 6 = 0$

بحل المعادلة من الدرجة الثانية نجد أن : م = [illegible] ، م = #

$1 = s \quad Ü \ \frac{م}{3} = {\left(\frac{م}{3}\right)}^{s} \ Ü \ {\left(\frac{م}{3}\right)}^{s} =$ أ ∵

$1- = s \quad Ü \ \frac{3}{م} = {\left(\frac{م}{3}\right)}^{s} \ Ü \ {\left(\frac{م}{3}\right)}^{s} =$ أ ∵

∴ الإجابة الصحيحة هي : ب

56

قيمة المقدار : $\sqrt{9-٢\sqrt{23-6\sqrt{10+4\sqrt{3-٢\sqrt{٢}}}}}$ تساوي :

أ) $\sqrt{٢}+1$	ب) $\sqrt{3}+1$	جـ) $\sqrt{٢}-1$	د) $\sqrt{3}-1$	هـ) $\sqrt{3}$

الحل :

$$\sqrt{9-٢\sqrt{23-6\sqrt{10+4\sqrt{3-٢\sqrt{٢}}}}} = \sqrt{9-٢\sqrt{23-6\sqrt{10+4\sqrt{(\sqrt{٢}-1)^{٢}}}}}$$

$$= \sqrt{9-٢\sqrt{23-6\sqrt{6+4\sqrt{٢}}}}$$

$$= \sqrt{9-٢\sqrt{23-6\sqrt{(\sqrt{٢}+٢)^{٢}}}}$$

$$= \sqrt{9-٢\sqrt{23-6\sqrt{٢}-12}}$$

$$= \sqrt{9-٢\sqrt{11-6\sqrt{٢}}}$$

$$= \sqrt{9-٢\sqrt{(3-\sqrt{٢})^{٢}}}$$

$$= \sqrt{9-6+٢\sqrt{٢}}$$

$$= \sqrt{3+٢\sqrt{٢}}$$

$$= \sqrt{(1+\sqrt{٢})^{٢}}$$

$$= 1+\sqrt{٢}$$

∴ الإجابة الصحيحة هي : أ

57

إذا كان : $\sqrt[4]{أ} - \frac{1}{\sqrt[4]{أ}} = 14$ ، فإن : $\sqrt[6]{أ} + \frac{1}{\sqrt[6]{أ}} =$

أ) ٢	ب) ٤	جـ) ٦	د) ٨	هـ) ١٢

الحل :

بتربيع طرفي : $\sqrt[4]{أ} - \frac{1}{\sqrt[4]{أ}} = 14$ نجد أن :

$$\sqrt[4]{أ} - \frac{1}{\sqrt[4]{أ}} = 14 \Rightarrow \sqrt{أ} + \frac{1}{\sqrt{أ}} - 2 = 196$$

$$\Rightarrow \sqrt{أ} + \frac{1}{\sqrt{أ}} = 198$$

الآن : نفرض أن : $س = \sqrt[6]{أ} + \frac{1}{\sqrt[6]{أ}}$

$$س^3 = \sqrt{أ} + \frac{1}{\sqrt{أ}} + 3\left(\sqrt[6]{أ} + \frac{1}{\sqrt[6]{أ}}\right) = 198 + 3س$$

$$\Rightarrow س^3 - 3س - 198 = 0$$

بتجربة قواسم الحد الثابت نجد أن : س = ٦ جذر لكثيرة الحدود ، بقسمة كثيرة الحدود على :

س - ٦ نجد أن : $س^3 - 3س - 198 = \{س - 6\}\{س^2 + 6س + 32\} = 0$.

ولكن : $س^2 + 6س + 32$ لا تحتوي على جذور حقيقية .

$$س = \sqrt[6]{أ} + \frac{1}{\sqrt[6]{أ}} = 6$$

∴ الإجابة الصحيحة هي : جـ

58

إذا كانت : $ظا^{-1}(s) = ظا^{-1}(4) + ظا^{-1}(6)$ ، فإن قيمة : س =

أ- ١٠	ب- ٢	جـ- $-\frac{10}{23}$	د- -٢	هـ- $\frac{10}{23}$

59

إذا كان : $\text{لو}_{14}(28) = \text{أ}$ ، فإن قيمة : $\text{لو}_{49}(16) =$

أ- $\frac{\text{أ}}{\text{أ} - 1}$	ب- $\frac{٢ - \text{أ}}{\text{أ} - 1}$	جـ- $\frac{\text{أ} - ٢}{٢\text{أ} - 1}$	د- $\frac{٢\text{أ} - ٢}{1 - \text{أ}}$	هـ- $\frac{٢\text{أ} - ٢}{٢ - \text{أ}}$

60

$$\frac{1}{1 \times 4} + \frac{1}{4 \times 7} + \frac{1}{7 \times 10} + \cdots\cdots + \frac{1}{31 \times 34} =$$

أ- $\frac{11}{34}$	ب- $\frac{33}{34}$	جـ- $\frac{99}{34}$	د- $\frac{11}{17}$	هـ- $\frac{11}{99}$

58

إذا كانت : $\text{ظا}^{-1}(s) = \text{ظا}^{-1}(4) + \text{ظا}^{-1}(6)$ ، فإن قيمة : س =

أ- ١٠	ب- ٢	جـ- $-\frac{10}{23}$	د- -٢	هـ- $\frac{10}{23}$

الحل :

تذكير : $\text{ظا}\left(\text{ظا}^{-1}(s)\right) = s$

بأخذ : ظل الزاوية للطرفين نجد أن :

$$\text{ظا}\left(\text{ظا}^{-1}(s)\right) = \text{ظا}\left(\text{ظا}^{-1}(4) + \text{ظا}^{-1}(6)\right)$$

$$\Leftarrow s = \text{ظا}\left(\text{ظا}^{-1}(4) + \text{ظا}^{-1}(6)\right)$$

$$\Leftarrow s = \frac{\text{ظا}\left(\text{ظا}^{-1}(4)\right) + \text{ظا}\left(\text{ظا}^{-1}(6)\right)}{1 - \text{ظا}\left(\text{ظا}^{-1}(4)\right) \times \text{ظا}\left(\text{ظا}^{-1}(6)\right)}$$

$$\Leftarrow s = \frac{4 + 6}{1 - 4 \times 6}$$

$$\Leftarrow s = -\frac{10}{23}$$

∴ الإجابة الصحيحة هي : جـ

59

إذا كان : $\text{لو}_{14}(28) = \text{أ}$ ، فإن قيمة : $\text{لو}_{49}(16) =$

هـ	د	جـ	ب	أ
هـ) $\frac{\text{٢} - \text{أ٢}}{\text{أ} - \text{٢}}$	د) $\frac{\text{٢} - \text{أ٢}}{\text{أ} - 1}$	جـ) $\frac{\text{٢} - \text{أ}}{1 - \text{أ٢}}$	ب) $\frac{\text{أ} - \text{٢}}{1 - \text{أ}}$	أ) $\frac{\text{أ}}{1 - \text{أ}}$

الحل :

$\text{لو}_{49}(16) = \text{لو}_{7}(4) = \text{٢لو}_{7}(\text{٢})$ ………(1)

$\text{لو}_{14}(28) = \text{أ}$ Û $\text{لو}_{14}(14 \times \text{٢}) = \text{أ}$ Û $\text{لو}_{14}(14) + \text{لو}_{14}(\text{٢}) = \text{أ}$

Û $1 + \text{لو}_{14}(\text{٢}) = \text{أ}$ Û $\text{لو}_{14}(\text{٢}) = \text{أ} - 1$

Û $\frac{1}{\text{لو}_{\text{٢}}(14)} = \text{أ} - 1$ Û $\frac{1}{\text{أ} - 1} = \text{لو}_{\text{٢}}(14)$

Û $\frac{1}{\text{أ} - 1} = \text{لو}_{\text{٢}}(7 \times \text{٢})$ Û $\frac{1}{\text{أ} - 1} = \text{لو}_{\text{٢}}(7) + \text{لو}_{\text{٢}}(\text{٢})$

Û $\frac{1}{\text{أ} - 1} = \text{لو}_{\text{٢}}(7) + 1$ Û $\frac{1}{\text{أ} - 1} - 1 = \text{لو}_{\text{٢}}(7)$

Û $\frac{\text{٢} - \text{أ}}{\text{أ} - 1} = \text{لو}_{\text{٢}}(7)$ Û $\frac{\text{أ} - 1}{\text{٢} - \text{أ}} = \text{لو}_{7}(\text{٢})$ ………(2)

بالتعويض من (2) في (1) نجد أن : $\text{لو}_{49}(16) = \frac{(1 - \text{أ})\text{٢}}{\text{أ} - \text{٢}}$

∴ الإجابة الصحيحة هي : هـ

60

$$\frac{1}{4\times1}+\frac{1}{7\times4}+\frac{1}{10\times7}+\cdots\cdots+\frac{1}{34\times31}=$$

أ- $\frac{11}{34}$	ب- $\frac{33}{34}$	جـ- $\frac{99}{34}$	د- $\frac{11}{17}$	هـ- $\frac{11}{99}$

الحل :

فائدة : هذا النوع من المتسلسلات لإيجاد مجموعها نستخدم طريقة الحذف وفكرتها تأتي من طريقة الكسور الجزئية .

أولا : نحاول إيجاد القانون العام لهذه المتسلسلة : $ح_k = \frac{1}{(1+3k)(3k-2)}$

ثانيا : نحاول استخدام الكسور الجزئية لتحويل الصورة العامة لحاصل طرح كسرين :

$$ح_k = \frac{1}{(1+3k)(3k-2)} = \frac{أ}{(3k-2)} + \frac{ب}{(1+3k)}$$

$$\Leftarrow ح_k = \frac{1}{(1+3k)(3k-2)} = \frac{(3k-2)ب + (1+3k)أ}{(1+3k)(3k-2)}$$

$$\Leftarrow 1 = (3k-2)ب + (1+3k)أ$$

ثالثا : نوجد قيم : أ ، ب بالتعويض بقيم مناسبة لـــ ن كالتالي :

عندما : ن = $\frac{2}{3}$ نجد أن : ٣أ = ١ ⇐ أ = $\frac{1}{3}$

وعندما : ن = - $\frac{1}{3}$ ⇐ - ٣ب = ١ ⇐ ب = - $\frac{1}{3}$

∴ يصبح القانون العام على الصورة : $ح_k = \frac{\frac{1}{3}}{(3k - 2)} + \frac{-\frac{1}{3}}{(3k + 1)}$

$\Leftarrow ح_k = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{(3k-2)} - \frac{1}{(3k+1)}\right)$

الآن :

بالتعويض بالحد العام بعد التغيير تصبح المتسلسلة على الصورة :

$$ح_k = \frac{1}{3} \times \left[\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{10}\right) + \cdots\cdots + \left(\frac{1}{31} - \frac{1}{34}\right)\right]$$

لاحظ الآن :

بحذف الحدود المتشابهة والمختلفة في الإشارة تصبح المتسلسلة على الصورة :

$$ح_k = \frac{1}{3} \times \left[\left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{1}{7}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{7}} - \cancel{\frac{1}{10}}\right) + \cdots\cdots + \left(\cancel{\frac{1}{31}} - \frac{1}{34}\right)\right]$$

$$\Leftarrow ح_k = \frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{1}{34}\right) = \frac{1}{3} \times \left(\frac{34 - 1}{34}\right) = \frac{1}{3} \times \left(\frac{33}{34}\right) = \frac{11}{34}$$

∴ الإجابة الصحيحة هي : م~

61

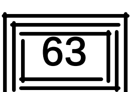
$$\frac{1}{7 \times 4 \times 1} + \frac{1}{10 \times 7 \times 4} + \frac{1}{13 \times 10 \times 7} + \cdots\cdots + \frac{1}{31 \times 28 \times 25} =$$

أ- $\frac{17}{217}$	ب- $\frac{3}{217}$	جـ- $\frac{9}{217}$	د- $\frac{24}{217}$	هـ- $\frac{11}{217}$

62

$$\sqrt{9997 \times 9998 \times 9999 \times 10000 + 1} =$$

أ- 9997000	ب- 997001	جـ- 9970001	د- 9997001	هـ- 99970001



63

جا²(10) + جا²(20) + جا²(30) + ... جا²(90) =

أ- صفر	ب- ١	جـ- ٤	د- ٥	هـ- ٨

61

$$= \frac{1}{31 \times 28 \times 25} + \cdots\cdots + \frac{1}{13 \times 10 \times 7} + \frac{1}{10 \times 7 \times 4} + \frac{1}{7 \times 4 \times 1}$$

أ- $\frac{17}{217}$	ب- $\frac{3}{217}$	جـ- $\frac{9}{217}$	د- $\frac{24}{217}$	هـ- $\frac{11}{217}$

الحل : هذه أيضاً أحد أنواع متسلسلات الحذف ، وشرح فكرتها كالتالي :

فائدة : هذا النوع من المتسلسلات لإيجاد مجموعها نستخدم طريقة الحذف وفكرتها تأتي من طريقة الكسور الجزئية .

أولاً : نحاول إيجاد القانون العام لهذه المتسلسلة : $[_k = \frac{1}{(4 + k3)(1 + k3)(٢ - k3)}$

ثانياً : نحاول استخدام الكسور الجزئية لتحويل الصورة العامة لحاصل طرح كسرين :

$$\frac{j}{(4 + k3)} + \frac{f}{(1 + k3)} + \frac{أ}{(٢ - k3)} = \frac{1}{(4 + k3)(1 + k3)(٢ - k3)} = [_k$$

$$= \frac{(1 + k3)(٢ - k3)\,j + (4 + k3)(٢ - k3)\,f + (4 + k3)(1 + k3)أ}{(4 + k3)(1 + k3)(٢ - k3)}$$

$$1 = (1 + k3)(٢ - k3)\,j + (4 + k3)(٢ - k3)\,f + (4 + k3)(1 + k3)أ \quad Ü$$

ثالثاً : نوجد قيم : م ، ب ، ا بالتعويض بقيم مناسبة لـــ ن كالتالي :

عندما : ن = [illegible] نجد أن : ١٨م = ١ ⇐ م = $\frac{1}{18}$

وعندما : ن = - [illegible] ⇐ - ٩ب = ١ ⇐ ب = - $\frac{1}{9}$

وعندما : ن = - [illegible] ⇐ - ٩ ا = ١ ⇐ ا = $\frac{1}{18}$

∴ يصبح القانون العام على الصورة : $[_k = \frac{\frac{1}{18}}{(4 + k3)} + \frac{\frac{1}{9}-}{(1 + k3)} + \frac{\frac{1}{18}}{(٢ - k3)}$

$$\therefore\ ح_k = \frac{1}{9}\left(\frac{\frac{1}{2}}{3k-2} - \frac{1}{3k+1} + \frac{\frac{1}{2}}{3k+4}\right)$$

الآن : بالتعويض بالحد العام بعد التغيير تصبح المتسلسلة على الصورة :

$$ح_k = \frac{1}{3}\left[\left(\frac{\frac{1}{2}}{1} - \frac{1}{4} + \frac{\frac{1}{2}}{7}\right) + \left(\frac{\frac{1}{2}}{4} - \frac{1}{7} + \frac{\frac{1}{2}}{10}\right) + \left(\frac{\frac{1}{2}}{7} - \frac{1}{10} + \frac{\frac{1}{2}}{13}\right) + \cdots\cdots + \left(\frac{\frac{1}{2}}{25} - \frac{1}{28} + \frac{\frac{1}{2}}{31}\right)\right]$$

الآن : ماهي الحدود المتشابهة التي يتم حذفها ؟ وكيف يتم ذلك ؟

$$ح_k = \frac{1}{3}\left[\left(\frac{\frac{1}{2}}{1} - \frac{1}{4} + \frac{\frac{1}{2}}{7}\right) + \left(\frac{\frac{1}{2}}{4} - \frac{1}{7} + \frac{\frac{1}{2}}{10}\right) + \left(\frac{\frac{1}{2}}{7} - \frac{1}{10} + \frac{\frac{1}{2}}{13}\right) + \cdots\cdots + \left(\frac{\frac{1}{2}}{25} - \frac{1}{28} + \frac{\frac{1}{2}}{31}\right)\right]$$

لاحظ : الحدود باللون الأحمر الحد السالب = مجموع الحدين الموجبين .

∴ كل ثلاثة حدود اثنان سيكونان موجبين ، وأحدهما سالباً ويساوي مجموع الموجبين ، لاحظ أن القادم بدايته ستكون : $-\frac{\frac{1}{2}}{10}$.

الآن : يمكن أن نستنتج الآتي : كل ثلاثة حدود ستلغى للسبب المذكور في الأعلى .

كذلك : ما الذي سيبقى بعد التغيير والحذف ؟

سيبقى الحدان الأول و الأخير وهما موجبان . كذلك سيبقى نصف الحد الثاني ، ونصف الحد ماقبل الأخير وهما سالبان ، وذلك لأن الحدين الأول والأخير لن يتكررا سوى مرة واحدة والحدين الثاني وماقبل الأخير سيتكررا مرتين أحدهما موجب والآخر سالب ، والسالب ضعف الموجب .

عوض عن بدء :

$$١)\ ح_k = \frac{1}{9}\left(\frac{\frac{1}{2}}{1} - \frac{\frac{1}{2}}{4} - \frac{\frac{1}{2}}{28} + \frac{\frac{1}{2}}{31}\right) = \frac{9}{217}$$

∴ الإجابة الصحيحة هي : جـ

62

$$\sqrt{9997 \times 9998 \times 9999 \times 10000 + 1} =$$

أ- 9997000	ب- 997001	جـ- 9970001	د- 9997001	هـ- 99970001

الحل :

يمكن أن نثبت النظرية التالية وهي حل لهذا السؤال ويمكن تكوين عشرات المسائل على هذه النظرية :

نص النظرية : { حاصل ضرب أربعة أعداد متتالية + ١ يمثل مربع كامل }

بصورة رياضية نريد أن نثبت أن المقدار :

أ × { أ + ١ } × { أ + ٢ } × { أ + ٣ } + ١ يمثل مربع كامل .

يمكن أن نعيد ترتيب المقدار كالتالي :

أ × { أ + ٣ } × { أ + ١ } × { أ + ٢ } + ١ = { أ² + ٣أ } × { أ² + ٣أ + ٢ } + ١

نفرض : ب = أ² + ٣أ ∴ يصبح المقدار على الصورة : ب × { ب + ٢ } + ١

⇐ { أ² + ٣أ } × { أ² + ٣أ + ٢ } + ١ = ب × { ب + ٢ } + ١

= ب² + ٢ب + ١ = { ب + ١ }²

بالتعويض بقيمة : ب نجد أن : { أ² + ٣أ } × { أ² + ٣أ + ٢ } + ١ = { أ² + ٣أ + ١ }²

الآن : عندما : أ = ٩٩٩٧ يصبح ماتحت الجذر على الصورة :

١ $\sqrt{9997 \times 9998 \times 9999 \times 10000 + 1} = \sqrt{\left((9997)^2 + 3 \times 9997 + 1\right)^2}$

$= (9997)^2 + 3 \times 9997 + 1$

$= 99970001$

∴ الإجابة الصحيحة هي : هـ

63

جا٢(10) + جا٢(20) + جا٢(30) + ... جا٢(90) =

أ- صفر	ب- ١	جـ- ٤	د- ٥	هـ- ٨

الحل :

نعلم أن : جا([ ) = جتا(90 - [ ) كذلك نعلم أن : جا٢([ ) + جتا٢([ ) = 1

الآن :

جا٢(10) = (جا(10))٢ = (جتا(90 - 10))٢ = (جتا(80))٢ = جتا٢(80)

بالمثل : جا٢(20) = جتا٢(70) ، جا٢(30) = جتا٢(60) ، جا٢(40) = جتا٢(50)

يصبح المقدار على الصورة :

جتا٢(50) + جتا٢(60) + جتا٢(70) + جتا٢(80) + جا٢(50) + جا٢(60) + جا٢(70) + جا٢(80) + جا٢(90)

∵ كل : جا٢([ ) + جتا٢([ ) = 1 ∴ يصبح ناتج المقدار على الصورة :

جا٢(10) + جا٢(20) + جا٢(30) + ... جا٢(90) = ١ + ١ + ١ + ١ + ١ = ٥

∴ الإجابة الصحيحة هي : د

64

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \cdots\cdots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}} =$$

أ- ٩	ب- ١٠	جـ- $\sqrt{10}$	د- ١ - $\sqrt{99}$	هـ- $\sqrt{99}$

65

ناتج : جتا(36°) - جتا(72°) =

أ- $\frac{1}{2}$	ب- $\frac{\sqrt{3}}{2}$	جـ- $\frac{\sqrt{2}}{2}$	د- $\frac{1}{4}$	هـ- $\frac{1}{3}$

66

إذا كانت النقاط : { ٠ ، ٠ } ، { أ ، ١١ } ، { ب ، ٣٧ } ؛ تمثل رؤوس مثلث متطابق الأضلاع

، فإن : أ × ب =

أ- ١٠٥	ب- ٢١ $\sqrt{3}$	جـ- ٥ $\sqrt{3}$	د- ٣١٥	هـ- ١٠٥ $\sqrt{3}$

64

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}=$$

أ- ٩	ب- ١٠	جـ- $\sqrt{١٠}$	د- ١ - $\sqrt{٩٩}$	هـ- $\sqrt{٩٩}$

الحل :

بالضرب في المرافق لكل حد على حده نجد أن :

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} \ ، \ \frac{\sqrt{1}-\sqrt{2}}{\sqrt{1}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{1}-\sqrt{2}}{1-2} = \frac{\sqrt{1}-\sqrt{2}}{-1} = \sqrt{2}-\sqrt{1}$$

بالمثل البقية :

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \ ، \ \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$$

∴ ممكن نعيد كتابة المقدار على الصورة :

$$(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots\cdots+(\sqrt{100}-\sqrt{99})$$

∴ بعد طرح الحدود المتشابهة والمختلفة في الإشارة يصبح المقدار على الصورة :

$$-\sqrt{1}+\sqrt{100} = -1+10 = 9$$

∴ الإجابة الصحيحة هي : أ-

65

ناتج : $\text{جتا}(36°) - \text{جتا}(72°) =$

أ-	ب-	جـ-	د-	هـ-
$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$

الحل :

بتطبيق خواص المتطابقات المثلثية : ضعف الزاوية + قوانين التبسيط :

$$\text{جتا}(36°) - \text{جتا}(72°) = \frac{2\left(\text{جتا}(36°) - \text{جتا}(72°)\right)\left(\text{جتا}(36°) + \text{جتا}(72°)\right)}{2\left(\text{جتا}(36°) + \text{جتا}(72°)\right)}$$

$$= \frac{2\left(\text{جتا}^2(36°) - \text{جتا}^2(72°)\right)}{2\left(\text{جتا}(36°) + \text{جتا}(72°)\right)}$$

$$= \frac{2\left(\frac{1}{2}\left(\text{جتا}(72°) + 1\right) - \frac{1}{2}\left(\text{جتا}(144°) + 1\right)\right)}{2\left(\text{جتا}(36°) + \text{جتا}(72°)\right)}$$

$$= \frac{\text{جتا}(72°) + 1 - \text{جتا}(144°) - 1}{2\left(\text{جتا}(36°) + \text{جتا}(72°)\right)}$$

$$= \frac{\text{جتا}(72°) - \text{جتا}(144°)}{2\left(\text{جتا}(36°) + \text{جتا}(72°)\right)}$$

$$= \frac{\text{جتا}(72°) - \text{جتا}(180° - 36°)}{2\left(\text{جتا}(36°) + \text{جتا}(72°)\right)}$$

$$= \frac{\text{جتا}(72°) + \text{جتا}(36°)}{2\left(\text{جتا}(36°) + \text{جتا}(72°)\right)} = \frac{1}{2}$$

∴ الإجابة الصحيحة هي : أ-

حل آخر للأخت الهاشمية :

بتطبيق متطابقة التحويل من طرح إلى ضرب :

$$\text{جتا}(36°) - \text{جتا}(72°) = ٢\,\text{جا}(54°) \times \text{جا}(18°)$$

بالضرب بسطاً ومقاماً في : $\text{جتا}(54°) \times \text{جتا}(18°)$ يصبح المقدار ثم استخدام متطابقة ضعف الزاوية للـــ { جـــا } كذلك قوانين التبسيط :

$$\frac{٢\,\text{جا}(54°) \times \text{جا}(18°)\,\text{جتا}(18°) \times \text{جتا}(54°)}{\text{جتا}(54°) \times \text{جتا}(18°)} = \frac{٢\,\text{جا}(54°)\,\text{جتا}(54°) \times ٢\,\text{جا}(18°)\,\text{جتا}(18°)}{٢\,\text{جتا}(54°) \times \text{جتا}(18°)}$$

$$= \frac{\text{جا}(108°) \times \text{جا}(36°)}{٢\,\text{جتا}(54°) \times \text{جتا}(18°)}$$

$$= \frac{\text{جا}(90° + 18°) \times \text{جا}(90 - 54°)}{٢\,\text{جتا}(54°) \times \text{جتا}(18°)}$$

$$= \frac{\text{جتا}(18°) \times \text{جتا}(54°)}{٢\,\text{جتا}(54°) \times \text{جتا}(18°)} = \frac{1}{٢}$$

∴ الإجابة الصحيحة هي : أ

66

إذا كانت النقاط : { ٠ ، ٠ } ، { أ ، ١١ } ، { ب ، ٣٧ } ؛ تمثل رؤوس مثلث متطابق الأضلاع

، فإن : أ × ب =

أ- ١٠٥	ب- 	جـ- ٥ √٣	د- ٣١٥	هـ- 

الحل :

إذا عرفنا النقاط كالتالي :

م = { ٠ ، ٠ } ، د = { أ ، ١١ } ، جـ = { ب ، ٣٧ }

كذلك إذا عرفنا قياس الزاوية التي يصنعها الضلع : ' م د '

مع محور السينات الموجب = ν .

∴ قياس الزاوية التي يصنعها الضلع : ' م د ' مع محور السينات الموجب = ν + ٦٠

نفرض أن : س = ' م د ' = ' د جـ ' = ' جـ م ' .

⇐ $جا(k) = \frac{11}{s}$ ، $جتا(k) = \frac{أ}{s}$ ، $جا(60+k) = \frac{37}{s}$ ، $جتا(60+k) = \frac{f}{s}$

الآن : من متطابقة مجموع زاويتين نجد أن :

$جا(60+k) = جا(k)جتا(60) + جتا(k)جا(60) = \frac{11 + أ\sqrt{3}}{2s}$

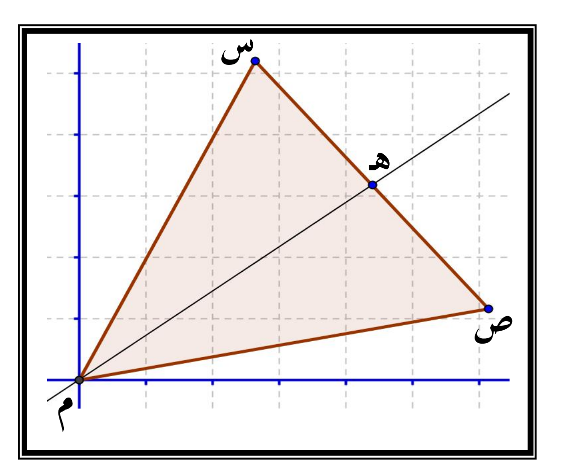
⇐ $\frac{11 + أ\sqrt{3}}{2s} = \frac{37}{s}$ Ü $11s + أs\sqrt{3} = 74s$ Ü $أ = 21\sqrt{3}$

$جتا(60+k) = جتا(k)جتا(60) - جا(k)جا(60) = \frac{أ - 11\sqrt{3}}{2s}$

⇐ $\frac{أ - 11\sqrt{3}}{2s} = \frac{f}{s}$ Ü $\frac{21\sqrt{3} - 11\sqrt{3}}{2s} = \frac{f}{s}$ Ü $\frac{10\sqrt{3}}{2s} = \frac{f}{s}$ Ü $f = 5\sqrt{3}$

∴ أ × ب = ٢١ √٣ × ٥ √٣ = ١٠٥ × ٣ = ٣١٥

∴ الإجابة الصحيحة هي : د



حل آخر :

إذا عرفنا النقاط كالتالي :

م { ٠ ، ٠ } ، ص { ۴ ، ١١ } ، س { ب ، ٣٧ }

إذا كانت : هـ منتصف : [w ، s]

⇐ إحداثيات : هـ = $\left(\frac{أ + ب}{٢} ، 24 \right)$ ، ∴ بما أن : م هـ منصف والمثلث متطابق الأضلاع .

⇐ المثلث : م هـ ص قائم الزاوية { ثلاثيني ستيني } ⇐ ' م هـ ' = [٣ × ' هـ ص '

⇐ $\overleftarrow{iT} = \begin{pmatrix} \frac{أ + f}{٢} \\ 24 \end{pmatrix}$ ، $\overleftarrow{wi} = \begin{pmatrix} \frac{أ - f}{٢} \\ 13 - \end{pmatrix}$

67

$$\frac{(j+1)^{99} + (j-1)^{99}}{٢} =$$

أ ١	ب ٢))	ج ٢)$	د - ٢)$	هـ ٢

68

ناتج : لو(ظا(1°)) + لو(ظا(٢°)) + لو(ظا(3°)) + ... + لو(ظا(89°)) =

أ $\frac{1}{٢}$	ب صفر	ج $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$	د $\frac{1}{4}$	هـ ٢

69

قيمة المقدار : (1 - ظتا(23°))(1 - ظتا(٢٢°)) =

أ $\frac{1}{٢}$	ب $\sqrt{٢}$	ج $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$	د $\frac{1}{4}$	هـ ٢

67

$$\frac{(1+j)^{99} + (1-j)^{99}}{٢} =$$

أ) ١	ب) ٢))	جـ) ٢)$	د) - ٢)$	هـ) ٢

الحل :

$1 + j = \sqrt{٢}\,($جتا$(45°) + j\,$جا$(45°))$

Ü $(1+j)^{99} = (\sqrt{٢})^{99}\,($جتا$(45 × 99) + j\,$جا$(45 × 99))$

$= (\sqrt{٢})^{99}\,($جتا$(135) + j\,$جا$(135))$

$= (\sqrt{٢})^{99}\,(-$جتا$(45) + j\,$جا$(45))$

$= -(\sqrt{٢})^{98} + (\sqrt{٢})^{98}\,j$

بالمثل نجد أن : $(1-j)^{99} = -(\sqrt{٢})^{98} - (\sqrt{٢})^{98}\,j$

$$\therefore \frac{(1+j)^{99} + (1-j)^{99}}{٢} = \frac{-(\sqrt{٢})^{98} + (\sqrt{٢})^{98}\,j - (\sqrt{٢})^{98} - (\sqrt{٢})^{98}\,j}{٢}$$

$$= \frac{-(\sqrt{٢})^{98} - (\sqrt{٢})^{98}}{٢} = \frac{-٢(\sqrt{٢})^{98}}{٢} = -٢^{49}$$

∴ الإجابة الصحيحة هي : د

68

ناتج : لو(ظا(1°)) + لو(ظا(٢°)) + لو(ظا(3°)) + …… + لو(ظا(89°)) =

أ) $\frac{1}{٢}$	ب) صفر	جـ) $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$	د) $\frac{1}{4}$	هـ) ٢

الحل :

سوف نستفيد من العلاقات التالية :

١ لو(أ) + لو(ب) = لو(أ ´ ب)

٢ ظا(أ) = ظتا(90 - أ) ٣ ظا(أ) ´ ظتا(أ) = 1

∴ ظا(1) = ظتا(89) ، وبالمثل البقية مع ملاحظة أن عدد الحدود = ٨٩ حد سيبقى الحد الأوسط

وهو : ظا(45) = 1 .

الآن :

؛ = لو(ظا(1°)) + لو(ظا(٢°)) + لو(ظا(3°)) + …… + لو(ظا(89°))

= لو(ظا(1°) ´ ظا(٢°) ´ ظا(3°) ´ …… ´ ظا(89°))

= لو(ظتا(89°) ´ ظتا(88°) ´ ظتا(87°) ´ …… ´ ظا(87°) ´ ظا(88°) ´ ظا(89°))

= لو(1 ´ 1 ´ 1 ´ …… ´ 1 ´ 1 ´ 1) = لو(1) = 0

∴ الإجابة الصحيحة هي : ب

69

قيمة المقدار : $(1 - \text{ظتا}(23°))(1 - \text{ظتا}(٢٢°)) =$

أ) $\frac{1}{٢}$	ب) $\sqrt{٢}$	جـ) $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$	د) $\frac{1}{4}$	هـ) ٢

الحل :

$$(1 - \text{ظتا}(23°))(1 - \text{ظتا}(٢٢°)) = \left(1 - \frac{\text{جتا}(23°)}{\text{جا}(23°)}\right)\left(1 - \frac{\text{جتا}(٢٢°)}{\text{جا}(٢٢°)}\right)$$

∴ بتوحيد المقامات ثم استخدام متطابقة مجموع زاويتين للـــ { جـــا ، جـــتا } ثم قوانين التحويل إلى ضرب نجد المقدار =

$$= \left(\frac{\text{جا}(23°) - \text{جتا}(23°)}{\text{جا}(23°)}\right)\left(\frac{\text{جا}(٢٢°) - \text{جتا}(٢٢°)}{\text{جا}(٢٢°)}\right)$$

$$= \left(\frac{\text{جا}(23°)\text{جا}(٢٢°) - \text{جتا}(23°)\text{جا}(٢٢°) - \text{جا}(23°)\text{جتا}(٢٢°) + \text{جتا}(23°)\text{جتا}(٢٢°)}{\text{جا}(23°)\text{جا}(٢٢°)}\right)$$

$$= \left(\frac{\text{جتا}(1°) - \text{جا}(45°)}{\text{جا}(23°)\text{جا}(٢٢°)}\right) = \left(\frac{\text{جتا}(1°) - \text{جتا}(45°)}{\frac{1}{٢} \times \text{جتا}(1°) - \text{جتا}(45°)}\right) = ٢$$

∴ الإجابة الصحيحة هي : هـ

70

إذا كان : جا(أ) + جا(f) = $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{٢}}$ ، جتا(أ) + جتا(f) = $\frac{1}{\sqrt{٢}}$ ، فإن حاصل جمع الزاويتين : أ + ب =

أ- ٦٠°	ب- ١٢٠°	جـ- ١٥٠°	د- ٢١٠°	هـ- ٢٤٠°

71

إذا كان : لو$_{k٢}$ (1944) = لو$_{k}$ ($486\sqrt{٢}$) ، فإن : ن^ =

أ- ٢^ × ٣%	ب- ٢% × ٣^	جـ- ٢^ × ٣(@	د- ٢(@ × ٣^	هـ- ٢(@ × ٣%

72

$\sqrt[3]{٢ + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{٢ - \sqrt{5}} =$

أ- ١	ب- ٢	جـ- ٣	د- ٤	هـ- ٥

70

إذا كان : $\text{جا}(\text{أ}) + \text{جا}(\text{ب}) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ ، $\text{جتا}(\text{أ}) + \text{جتا}(\text{ب}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ، فإن حاصل جمع الزاويتين : أ + ب =

أ- ٦٠°	ب- ١٢٠°	جـ- ١٥٠°	د- ٢١٠°	هـ- ٢٤٠°

الحل :

حل مختصر :

باستخدام متطابقة التحويل من جمع إلى ضرب :

$$\frac{\text{جا}(\text{أ}) + \text{جا}(\text{ب})}{\text{جتا}(\text{أ}) + \text{جتا}(\text{ب})} = \frac{2\,\text{جا}\left(\frac{\text{أ}+\text{ب}}{2}\right)\text{جتا}\left(\frac{\text{أ}-\text{ب}}{2}\right)}{2\,\text{جتا}\left(\frac{\text{أ}+\text{ب}}{2}\right)\text{جتا}\left(\frac{\text{أ}-\text{ب}}{2}\right)} = \text{ظا}\left(\frac{\text{أ}+\text{ب}}{2}\right)$$

$$\Leftarrow \text{ظا}\left(\frac{\text{أ}+\text{ب}}{2}\right) = \sqrt{3} \Leftarrow \frac{\text{أ}+\text{ب}}{2} = 60° \Leftarrow \text{أ}+\text{ب} = 120°$$

∴ الإجابة الصحيحة هي : ب

71

إذا كان : $\text{لو}_{2ن}(1944) = \text{لو}_{ن}(486\sqrt{2})$ ، فإن : $ن^{6} =$

أ- $2^{6} \times 3^{5}$	ب- $2^{5} \times 3^{6}$	جـ- $2^{6} \times 3^{20}$	د- $2^{20} \times 3^{6}$	هـ- $2^{20} \times 3^{5}$

الحل :

نفرض أن : $\text{لو}_{2ن}(1944) = \text{لو}_{ن}(486\sqrt{2}) = أ$

$\therefore\ 2^{أ}\,ن^{أ} = 1994 = 2^{3} \times 3^{5}$ ………(1)

$ن^{أ} = 486\sqrt{2} = 2 \times 3^{5} \times 2^{\frac{1}{2}}$ ………(2)

بالتعويض بقيمة : ن من : { 2 } في { 1 } نجد أن :

$2^{أ} \times 2 \times 3^{5} \times 2^{\frac{1}{2}} = 2^{3} \times 3^{5} \Leftarrow 2^{أ} \times 2 \times 2^{\frac{1}{2}} = 2^{3} \Leftarrow 2^{أ} = 2^{\frac{3}{2}} \Leftarrow أ = \frac{3}{2}$

$ن^{\frac{3}{2}} = 2 \times 3^{5} \times 2^{\frac{1}{2}} \Leftarrow \left(ن^{\frac{3}{2}}\right)^{4} = \left(2 \times 3^{5} \times 2^{\frac{1}{2}}\right)^{4} \Leftarrow ن^{6} = 2^{6} \times 3^{20}$

∴ الإجابة الصحيحة هي : جـ

72

$$\sqrt[3]{٢ + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{٢ - \sqrt{5}} =$$

أ) ١	ب) ٢	جـ) ٣	د) ٤	هـ) ٥

الحل :

من متطابقة مكعب كامل :

$\text{أ} = \text{ب} + \text{جـ} \Leftarrow \text{أ}^3 = \text{ب}^3 + \text{جـ}^3 + ٣\text{ب}^2\text{جـ} + ٣\text{ب جـ}^2 = \text{ب}^3 + \text{جـ}^3 + ٣\text{ب جـ}\{\text{ب} + \text{جـ}\}$

$= \text{ب}^3 + \text{جـ}^3 + ٣\text{ب جـ أ}$

نفرض : $\text{أ} = \sqrt[3]{٢ + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{٢ - \sqrt{5}}$

١ $\text{أ}^3 = \left(\sqrt[3]{٢ + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{٢ - \sqrt{5}}\right)^3$

$= (٢ + \sqrt{5}) + (٢ - \sqrt{5}) + 3\text{أ}\sqrt[3]{(٢ + \sqrt{5})(٢ - \sqrt{5})}$

$= 4 + 3\text{أ}\sqrt[3]{-1} = 4 - 3\text{أ}$

$\therefore \text{أ}^3 = -٣\text{أ} + ٤ \Leftarrow \text{أ}^3 + ٣\text{أ} - ٤ = ٠$

$\Leftarrow \{\text{أ} - ١\}\{\text{أ}^2 + \text{أ} + ٤\} = ٠$

$\Leftarrow \text{أ} = ١$ المعادلة : $\{\text{أ}^2 + \text{أ} + ٤\}$ ليس لها جذور حقيقية في ح .

$$\sqrt[3]{٢ + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{٢ - \sqrt{5}} = 1$$

∴ الإجابة الصحيحة هي : أ)

73

ناتج الجمع : $\frac{1}{1} + \frac{1}{٢} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{36} + \frac{1}{72} + \frac{1}{216} + \frac{1}{432} + \frac{5}{432}$

أ- $\frac{54}{216}$	ب- $\frac{3}{٢}$	جـ- ٢	د- $\frac{144}{287}$	هـ- $\frac{287}{144}$

74

إذا كان : $4^{s_1} = 5$ ، $5^{s_٢} = 6$ ، $6^{s_3} = 7$ ، .... ، $127^{s_{124}} = 128$

، فإن : s_1 ´ s_2 ´ s_3 ´ s_4 ´ ...... ´ s_{123} ´ s_{124} =

أ- ٢	ب- [illegible]	جـ- ٣	د- [illegible]	هـ- ٤

75



الدوائر الثلاث الصغيرة متطابقة ونصف قطرها = ر ، الدائرة الكبيرة نصف قطرها = م ، الدائرة الكبيرة تمس الدائرتين الحمراء وتمس المستويين الإحداثيين ، والدائرتين الحمراء تمس الدائرة الخضراء وكل دائرة تمس أحد المستويين ، والدائرة الخضراء تمس المستويين معاً ، فإن : $\frac{م}{ر}$ =

أ- ٥	ب- ٦	جـ- ٨	د- ٩	هـ- ١٠

73

ناتج الجمع : $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{36}+\frac{1}{72}+\frac{1}{216}+\frac{5}{432}$

أ) $\frac{781}{432}$	ب) $\frac{3}{2}$	جـ) 2	د) $\frac{144}{287}$	هـ) $\frac{287}{144}$

الحل :

نفرض أن :

$$أ = \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{36}+\frac{1}{72}+\frac{1}{216}+\frac{5}{432}$$

$$\Leftarrow أ \times 432 = \left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{36}+\frac{1}{72}+\frac{1}{216}+\frac{5}{432}\right)\times 432$$

$$\Leftarrow أ \times 432 = 432+216+72+36+12+6+2+5$$

$$\Leftarrow أ \times 432 = 781 \Leftarrow أ = \frac{781}{432}$$

∴ الإجابة الصحيحة هي : أ

74

إذا كان : $4^{س_1} = 5$ ، $5^{س_2} = 6$ ، $6^{س_3} = 7$ ، .... ، $127^{س_{124}} = 128$

، فإن : $س_1 \times س_2 \times س_3 \times س_4 \times \cdots\cdots \times س_{123} \times س_{124} =$

أ~ ٢	ب~ ١١/٢	جـ~ ٣	د~ ٧/٢	هـ~ ٤

الحل :

$\because$ $5^{س_2} = 6$ و $4^{س_1} = 5 \Leftarrow (4^{س_1})^{س_2} = 6 \therefore 4^{س_1 \times س_2} = 6$

بالمثل : $6^{س_3} = 7 \Leftarrow (4^{س_1 \times س_2})^{س_3} = 7 \therefore 4^{س_1 \times س_2 \times س_3} = 7$

الآن :

$$4^{س_1 \times س_2 \times س_3 \times س_4 \times \cdots \times س_{123} \times س_{124}} = 128 \quad (1)$$

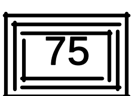
$$\therefore (2^2)^{(س_1 \times س_2 \times س_3 \times س_4 \times \cdots \times س_{123} \times س_{124})} = 2^7$$

$$\therefore 2^{2(س_1 \times س_2 \times س_3 \times س_4 \times \cdots \times س_{123} \times س_{124})} = 2^7$$

$$\therefore 2(س_1 \times س_2 \times س_3 \times س_4 \times \cdots\cdots \times س_{123} \times س_{124}) = 7$$

$$\therefore س_1 \times س_2 \times س_3 \times س_4 \times \cdots\cdots \times س_{123} \times س_{124} = \frac{7}{2}$$

$\therefore$ الإجابة الصحيحة هي : د~



الدوائر الثلاث الصغيرة متطابقة ونصف قطرها = ر ، الدائرة الكبيرة نصف قطرها = م ، الدائرة الكبيرة تمس الدائرتين الحمراء وتمس المستويين الإحداثيين ، والدائرتين الحمراء تمس الدائرة الخضراء وكل دائرة تمس أحد المستويين ، والدائرة الخضراء تمس المستويين معاً ، فإن : $\frac{l}{v}$ =

أ~ ٥	ب~ ٦	جـ~ ٨	د~ ٩	هـ~ ١٠

الحل :

من الرسم يتضح أن :

$$(م + ر)^2 = (م - ر)^2 + (م - ٣ر)^2$$

$$\Leftarrow م^2 + ٢مر + ر^2 = م^2 - ٢مر + ر^2 + م^2 - ٦مر + ٩ر^2$$

$$\Leftarrow م^2 - ١٠مر + ٩ر^2 = ٠$$

$$\Leftarrow (م - ٩ر)(م - ر) = ٠$$

⇐ $م = ر$ ، وهذا مستحيل ، أو $م = ٩ر$ وهذا ممكن ومقبول .

Ü $\frac{l}{v} = 9$

∴ الإجابة الصحيحة هي : د~

76

عدد الأزواج المرتبة : { م ، ن } لكل : م × ن ≥ ٠ التي تحقق :

$l^3 + k^3 + 99kl = 33^3$ **تساوي :**

أ- ٢	ب- ٣	جـ- ٣٣	د- ٣٥	هـ- ٩٩

77

المتتالية : أ١ ، أ٢ ، أ٣ ، .... تحقق : أ١ = ١٩ ، أ٩ = ٩٩ ، ولكل :

ن ≥ ٣ ، فإن : أن = المتوسط الحسابي لأول { ن - ١ } حداً ، فإن : أ٢ =

أ- ٢٩	ب- ٥٩	جـ- ٧٩	د- ٩٩	هـ- ١٧٩

78



اعتبر كل المثلثات : أ ب جـ التي تحقق الشروط التالية :



‖ أ ب ‖ = ‖ أ جـ ‖ ، ء ∈ أ ب ، حيث : جـ ء ⊥ أ ب ،

وكانت الأطوال : ‖ أ ء ‖ ، ‖ ب ء ‖ ∈ ص+ ، ‖ جـ ء ‖ = ٥٧ ،

فإن أقل قيمة لـ ‖ أ ب ‖ =

أ- ٩	ب- ١٠	جـ- ١١	د- ١٢	هـ- ١٣

76

عدد الأزواج المرتبة الصحيحة : $(\text{م} ، \text{ن})$ لكل : $\text{م} \times \text{ن} \geqslant 0$ التي تحقق :

$\text{م}^3 + \text{ن}^3 + 99\,\text{م}\,\text{ن} = 33^3$ **تساوي :**

أ) ٢	ب) ٣	جـ) ٣٣	د) ٣٥	هـ) ٩٩

الحل :

$\because (\text{م} + \text{ن})^3 = \text{م}^3 + \text{ن}^3 + 3\,\text{م}^2\text{ن} + 3\,\text{م}\,\text{ن}^2 = \text{م}^3 + \text{ن}^3 + 3\,\text{م}\,\text{ن}\,(\text{م} + \text{ن})$

$\therefore (\text{م} + \text{ن})^3 - 3\,\text{م}\,\text{ن}\,(\text{م} + \text{ن}) + 99\,\text{م}\,\text{ن} - 33^3 = 0$

$\Leftarrow (\text{م} + \text{ن})^3 - 33^3 - 3\,\text{م}\,\text{ن}\,(\text{م} + \text{ن}) + 99\,\text{م}\,\text{ن} = 0$

$\Leftarrow (\text{م} + \text{ن} - 33)[(\text{م} + \text{ن})^2 + 33(\text{م} + \text{ن}) + 33^2] - 3\,\text{م}\,\text{ن}(\text{م} + \text{ن} - 33) = 0$

$\Leftarrow (\text{م} + \text{ن} - 33)((\text{م} + \text{ن})^2 + 33(\text{م} + \text{ن}) + 33^2 - 3\,\text{م}\,\text{ن}) = 0$

إما : $\text{م} + \text{ن} = 33$ وهنا نستنتج : ٣٤ حلاً على الصورة :

$(0 ، 33) ، (1 ، 32) ، .... ، (32 ، 1) ، (33 ، 0)$.

أو : $\text{م}^2 + \text{ن}^2 + 2\,\text{م}\,\text{ن} + 33\,\text{م} + 33\,\text{ن} + 33^2 - 3\,\text{م}\,\text{ن} = 0$

$\Leftarrow \text{م}^2 + \text{ن}^2 - \text{م}\,\text{ن} + 33\,\text{م} + 33\,\text{ن} + 33^2 = 0$

$\Leftarrow 2\,\text{م}^2 + 2\,\text{ن}^2 - 2\,\text{م}\,\text{ن} + 66\,\text{م} + 66\,\text{ن} + 2 \times 33^2 = 0$

⇐ م^2 + ن^2 - ٢م ن + م^2 + ٢ × ٣٣م + ٣٣^2 + ن^2 + ٢×٣٣ن + ٣٣^2 = ٠

⇐ { م - ن }^{2} + { م + ٣٣ }^{2} + { ن + ٣٣ }^{2} = ٠

∵ م × ن ⩾ ٠ أي أعداد موجبة أو مساوية للصفر

وبما أنه حاصل جمع ثلاث قيم مربعة تساوي الصفر وهذا يتحقق في حالة واحدة إذا كانت كل واحدة منها تساوي الصفر .

⇐ إما : { م - ن }^{2} = ٠ ⇐ م = ن = ٠ ⇐ { ٠ ، ٠ } حل للمعادلة .

أو : { م + ٣٣ }^{2} = ٠ ⇐ م = - ٣٣

أو : { ن + ٣٣ }^{2} = ٠ ⇐ ن = - ٣٣

عند : م = ن = - ٣٣ غير ممكن لأن الشرط أن قيم : م ، ن ⩾ ٠ .

∴ عدد الحلول = ٣٥ حلاً .

∴ الإجابة الصحيحة هي : د

77

المتتالية : م١ ، م٢ ، م٣ ، .... تحقق : م١ = ١٩ ، م٩ = ٩٩ ، ولكل :

ن ⩾ ٣ ، فإن : من = المتوسط الحسابي لأول { ن - ١ } حداً ، فإن : م٢ =

أ- ٢٩	ب- ٥٩	جـ- ٧٩	د- ٩٩	هـ- ١٧٩

الحل :

∵ من = المتوسط الحسابي لأول { ن - ١ } حداً ، لكل : ن ⩾ ٣

الآن :

$$\text{أ}_k = \frac{\text{أ}_1 + \text{أ}_2 + \text{أ}_3 + \cdots\cdots + \text{أ}_{k-1}}{k-1}$$

$$\Rightarrow (k-1)\,\text{أ}_k = \text{أ}_1 + \text{أ}_2 + \text{أ}_3 + \cdots\cdots + \text{أ}_{k-1} \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

بالمثل :

$$\text{أ}_{k+1} = \frac{\text{أ}_1 + \text{أ}_2 + \text{أ}_3 + \cdots\cdots + \text{أ}_{k-1} + \text{أ}_k}{k} \quad \cdots\cdots\cdots(2)$$

بالتعويض من : { ٢ } في { ١ } نجد أن :

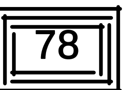
$$\text{أ}_{k+1} = \frac{(1-k)\,\text{أ}_k + \text{أ}_k}{k} = \frac{k\,\text{أ}_k - \text{أ}_k + \text{أ}_k}{k} = \frac{k\,\text{أ}_k}{k} = \text{أ}_k \qquad \boxed{\Rightarrow \text{أ}_{k+1} = \text{أ}_k}$$

∴ بما أن : $\boxed{\Rightarrow \text{أ}_{k+1} = \text{أ}_k}$ هذا يعني أن كل حد يساوي التالي له أي :

$$\text{أ}_9 = \text{أ}_8 = \text{أ}_7 = \text{أ}_6 = \text{أ}_5 = \text{أ}_4 = \text{أ}_3 \Rightarrow \boxed{\text{أ}_3 = 99}$$

$$\Rightarrow \text{أ}_3 = \frac{\text{أ}_1 + \text{أ}_2}{2} \Rightarrow 99 = \frac{19 + \text{أ}_2}{2} \Rightarrow \boxed{\text{أ}_2 = 179}$$

∴ الإجابة الصحيحة هي : هـ



اعتبر كل المثلثات : أ ب جـ التي تحقق الشروط التالية :

‘ أ ب ‘ = ‘ أ جـ ‘ ، ء ∈ أ ب ، **حيث :** جـ ء ⊥ أ ب ،

وكانت الأطوال : ‘أ ء‘ ، ‘ب ء‘ ∈ ص$^+$ ، ‘جـ ء‘^{2} = ٥٧ ،

فإن أقل قيمة لـ ‘ أ ب ‘ =

أ) ٩	ب) ١٠	جـ) ١١	د) ١٢	هـ) ١٣

الحل :

المثلث : أ جـ ء قائم الزاوية ⇐ من نظرية فيثاغورث نجد أن :

‘ أ جـ ‘^{2} = ‘ أ ء ‘^{2} + ‘ جـ ء ‘^{2} ⇐ ‘ أ جـ ‘^{2} - ‘ أ ء ‘^{2} = ‘ جـ ء ‘^{2}

⇐ ‘ أ جـ ‘^{2} - ‘ أ ء ‘^{2} = ٥٧

∴ إما { ‘ أ جـ ‘ + ‘ أ ء ‘ }{ ‘ أ جـ ‘ - ‘ أ ء ‘ } = ١٩ × ٣

أو { ‘ أ جـ ‘ + ‘ أ ء ‘ }{ ‘ أ جـ ‘ - ‘ أ ء ‘ } = ٥٧ × ١

∵ القيم صحيحة موجبة ممكن لدينا الحالتين التاليتين فقط :

الحالة الأولى :

⇐ ‘ أ جـ ‘ + ‘ أ ء ‘ = ١٩ ....{ ١ } لأنها الأكبر .

⇐ ‘ أ جـ ‘ - ‘ أ ء ‘ = ٣ ....{ ٢ } لأنها الأصغر .

∴ بالجمع نجد أن : ٢ × ‘ أ جـ ‘ = ٢٢ ⇐ ‘ أ جـ ‘ = ١١

الحالة الثانية :

⇐ ' ٢ ج ' + ' ٢ ء ' = ٥٧ .... { ١ } لأنها الأكبر .

⇐ ' ٢ ج ' - ' ٢ ء ' = ١ .... { ٢ } لأنها الأصغر .

∴ بالجمع نجد أن : ٢ × ' ٢ ج ' = ٥٨ ⇐ **' ٢ ج ' = ٢٩**

∴ واضح أن أصغر القيم هي عند : ' ٢ ج ' = ١١

وبما أن المثلث : ٢ ب ج متطابق الضلعين : ' ٢ ب ' = ' ٢ ج '

⇐ **' ٢ ب ' = ١١**

∴ الإجابة الصحيحة هي : ج~

79

ناتج المقدار :

$$\frac{1430^3 - 1429 \times 1430^2 - 1429^2 \times 1430 + 1429^3 + 1}{286 - 285 + 284 - 283 + \cdots\cdots + 2 - 1} =$$

أ~ ٢٠	ب~ ١٤٣	جـ~ ١٤٢٩	د~ ١٤٣٠	هـ~ ٢٨٥٩

80

إذا كان : $\frac{1}{\text{لو}_{143}(1430)^{2009}} + \frac{1}{\text{لو}_{5}(1430)^{2009}} + \frac{1}{\text{لو}_{2}(1430)^{2009}} = \frac{أ}{ب}$

، **فإن :** أ + ب =

أ~ ١٤٣٠	ب ١٤٢٩	جـ~ ٢٠٠٨	د~ ٢٠٠٩	هـ~ ٢٠١٠

81

ناتج ضرب المقدار :

$$(م + 1)(م^{2} + 1)(م^{2^2} + 1)(م^{2^3} + 1)\cdots\cdots(م^{2^{99}} + 1) =$$

أ~ $م^{2^{99}} - 1$	ب~ $م^{2^{100}} - 1$	جـ~ $م^{2^{99}} + 1$	د~ $م^{2^{100}} + 1$	هـ~ $م^{2^{198}} + 1$

79

ناتج المقدار :

$$\frac{1430^3 - 1429 \times 1430^2 - 1430 \times 1429^2 + 1429^3 + 1}{286 - 285 + 284 - 283 + \cdots + 2 - 1} =$$

أ) ٢٠	ب) ١٤٣	جـ) ١٤٢٩	د) ١٤٣٠	هـ) ٢٨٥٩

الحل :

نفرض أن المقدار = جـ .

$$جـ = \frac{1430^3 - 1429 \times 1430^2 - 1430 \times 1429^2 + 1429^3 + 1}{286 - 285 + 284 - 283 + \cdots + 2 - 1}$$

$$= \frac{1430^2 (1420 - 1439) - 1429^2 \times (1430 - 1429) + 1}{\underbrace{1 + 1 + 1 + \cdots + 1}_{143 \text{ مرة}}}$$

$$= \frac{1430^2 \times 1 - 1429^2 \times 1 + 1}{143}$$

$$= \frac{(1429 + 1430)(1429 + 1430) + 1}{143}$$

$$= \frac{2859 \times 1 + 1}{143} = \frac{2860}{143} = 20$$

∴ الإجابة الصحيحة هي : أ)

80

إذا كان :

$$\frac{1}{\text{لو}_{143}(1430)^{2009}} + \frac{1}{\text{لو}_{5}(1430)^{2009}} + \frac{1}{\text{لو}_{٢}(1430)^{2009}} = \frac{أ}{ب}$$

، فإن : أ + ب =

أ- ١٤٣٠	ب- ١٤٢٩	جـ- ٢٠٠٨	د- ٢٠٠٩	هـ- ٢٠١٠

الحل :

من خصائص اللوغاريتمات :

$$\text{لو}_{s}(w) = \frac{\text{لو}(w)}{\text{لو}(s)}$$

الآن :

$$\frac{أ}{ب} = \frac{1}{\text{لو}_{143}(1430)^{2009}} + \frac{1}{\text{لو}_{5}(1430)^{2009}} + \frac{1}{\text{لو}_{٢}(1430)^{2009}}$$

$$= \frac{1}{2009\,\text{لو}_{143}(1430)} + \frac{1}{2009\,\text{لو}_{5}(1430)} + \frac{1}{2009\,\text{لو}_{٢}(1430)}$$

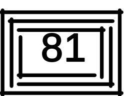
$$= \frac{1}{\frac{2009\,\text{لو}(1430)}{\text{لو}(143)}} + \frac{1}{\frac{2009\,\text{لو}(1430)}{\text{لو}(5)}} + \frac{1}{\frac{2009\,\text{لو}(1430)}{\text{لو}(٢)}}$$

$$= \frac{\text{لو}(143)}{2009\,\text{لو}(1430)} + \frac{\text{لو}(5)}{2009\,\text{لو}(1430)} + \frac{\text{لو}(٢)}{2009\,\text{لو}(1430)}$$

$$= \frac{\text{لو}(143) + \text{لو}(5) + \text{لو}(٢)}{2009\,\text{لو}(1430)}$$

$$= \frac{\text{لو}(143 \times 5 \times ٢)}{2009\,\text{لو}(1430)} = \frac{\text{لو}(1430)}{2009\,\text{لو}(1430)} = \frac{1}{2009}$$

∴ أ + ب = ٢٠١٠ ⇐ الإجابة الصحيحة هي : هـ



ناتج المقدار :

$$(1+ر)+(1+ر^{٢})+(1+ر^{٢^{٢}})+(1+ر^{٢^{3}})+\cdots\cdots+(1+ر^{٢^{99}}) =$$

أ) $ر^{٢^{99}} - 1$	ب) $ر^{٢^{100}} - 1$	جـ) $ر^{٢^{99}} + 1$	د) $ر^{٢^{100}} + 1$	هـ) $ر^{٢^{198}} + 1$

الحل :

الطريقة الأولى :

بضرب المقدار في : ٢ - ١ ، ولاحظ أن المقدار لن يتأثر بشيء ؛ نجد أن :

$$[\;= (1-ر)(1+ر)(1+ر^{٢})(1+ر^{٢^{٢}})(1+ر^{٢^{3}})\cdots\cdots(1+ر^{٢^{99}})$$

$$= (1-ر^{٢})(1+ر^{٢})(1+ر^{٢^{٢}})(1+ر^{٢^{3}})\cdots\cdots(1+ر^{٢^{99}})$$

$$= (1-ر^{٢^{٢}})(1+ر^{٢^{٢}})(1+ر^{٢^{3}})\cdots\cdots(1+ر^{٢^{99}})$$

$$= (1-ر^{٢^{3}})(1+ر^{٢^{3}})\cdots\cdots(1+ر^{٢^{99}})$$

$$= (1-ر^{٢^{5}})\cdots\cdots(1+ر^{٢^{99}}) = ر^{٢^{100}} - 1$$

الطريقة الثانية :

الأعداد على الصورة : $t_k = ر^{٢^{k}} + 1$ ، تسمى بأعداد فيرما حيث : $ن \geqslant ٠$

قاعدة : حاصل ضرب : ن من أعداد فيرما : $t_1 \times t_{٢} \times t_3 \times \cdots\cdots \times t_k = t_{1+k} + ر$

$$١ \quad (1+ر)(1+ر^{٢})(1+ر^{٢^{٢}})(1+ر^{٢^{3}})\cdots\cdots(1+ر^{٢^{99}}) = ر^{٢^{1+99}} + 1 - ر = ر^{٢^{100}} - 1$$

⇐ الإجابة الصحيحة هي : ب

82

ناتج المقدار :

$$1\times 1! + 2\times 2! + 3\times 3! + \cdots\cdots + 1430\times 1430!$$

أ- $\{1430!\}!$	ب- $1430! + 1$	جـ- $1431!$	د- $1431! + 1$	هـ- $1431! - 1$

83

إذا كان : $د\left(\frac{1+س}{س}\right) = \frac{س^2+1}{س^2} + \frac{1}{س}$ ، **فإن :** $د\{س\} =$

أ- $س^2 - س + 1$	ب- $س^2 + س + 1$	جـ- $س^3 - س^2 + 1$	د- $س^3 + س^2 + 1$	هـ- $س^3 - س + 1$

84

إذا كانت :

$$د(س) = (1+س)^{1000} + س(1+س)^{999} + س^2(1+س)^{998} + \cdots\cdots + س^{1000}$$

، **فإن معامل :** $س^{50}$ **يساوي :**

أ- $\binom{1000}{50}$	ب- $\binom{1000}{51}$	جـ- $\binom{1001}{50}$	د- $\binom{1001}{51}$	هـ- $\binom{1001}{5}$

82

ناتج المقدار :

$$1 \times 1! + 2 \times 2! + 3 \times 3! + \cdots\cdots + 1430 \times 1430!$$

أ- $\{1430!\}!$	ب- $1430! + 1$	ج- $1431!$	د- $1431! + 1$	هـ- $1431! - 1$

الحل :

لاحظ يمكن كتابة المجموع السابق على الصورة : $\sum_{k=1}^{1430} k \times k!$

الآن :

$$\sum_{k=1}^{1430} k \times k! = \sum_{k=1}^{1430} \left(k \times k! + k! - k! \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{1430} \left((k+1) \times k! - k! \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{1430} \left((k+1)! - k! \right)$$

الآن : نعوض بقيم المجموع سنجد أن :

$$\sum_{k=1}^{1430} \left((k+1)! - k! \right) = 2! - 1! + 3! - 2! + 4! - 3! + \cdots\cdots + 1431! - 1430!$$

$$= -1! + 1431! = \boxed{1431! - 1}$$

⇐ الإجابة الصحيحة هي : هـ

83

إذا كان: $د\left(\frac{1+\text{س}}{\text{س}}\right) = \frac{1+\text{س}^2}{\text{س}^2} + \frac{1}{\text{س}}$ ، **فإن:** $د\{\text{س}\} =$

أ- س² - س + ١	ب- س² + س + ١	جـ- س³ - س² + ١	د- س³ + س² + ١	هـ- س³ - س + ١

الحل:

نفرض أن:

$$\text{ص} = \frac{1+\text{س}}{\text{س}} \Leftarrow \text{ص س} = 1 + \text{س} \Leftarrow \text{ص س} - \text{س} = 1 \Leftarrow \text{س} = \frac{1}{\text{ص} - 1}$$

الآن:

$$د(\text{ص}) = \frac{1 + \left(\frac{1}{\text{ص}-1}\right)^2}{\left(\frac{1}{\text{ص}-1}\right)^2} + \frac{1}{\frac{1}{\text{ص}-1}} = \frac{1}{\frac{1}{(\text{ص}-1)^2}} + 1 + \text{ص} - 1$$

$$= (\text{ص}-1)^2 + 1 + \text{ص} - 1 = \text{ص}^2 - 2\text{ص} + 1 + 1 + \text{ص} - 1$$

$$= \text{ص}^2 - \text{ص} + 1$$

$\therefore$ $د\{\text{س}\} = \text{س}^2 - \text{س} + ١$

⟸ الإجابة الصحيحة هي: أ

84

إذا كانت :

$$د(s) = (1+s)^{1000} + s\,(1+s)^{999} + s^{2}\,(1+s)^{998} + \cdots\cdots + s^{1000}$$

، فإن معامل : س(% يساوي :

أ) $\binom{1000}{50}$	ب) $\binom{1000}{51}$	جـ) $\binom{1001}{50}$	د) $\binom{1001}{51}$	هـ) $\binom{1001}{5}$

الحل :

يمكن إعادة كتابة الدالة على الصورة :

$$s^{1000} + s^{999}(1+s) + s^{998}(1+s)^{2} + \cdots\cdots + (1+s)^{1000}$$

وهي تمثل متسلسلة هندسية حدها الأول = س))) ، وأساسها = $\frac{1+s}{s}$ ، وعدد حدودها = ١٠٠١ حداً ، ومجموعها كالتالي :

$$= \frac{s^{1000}\left(1 - \left(\frac{1+s}{s}\right)^{1001}\right)}{\frac{s-1+s}{s}} = \frac{\left(s^{1000} - \frac{(1+s)^{10001}}{s}\right)}{\frac{1}{s}}$$

$$= \frac{\left(s^{1001} - \frac{(1+s)^{10001}}{s}\right)}{\frac{1}{s}} = \boxed{s^{1001} - (1+s)^{10001}}$$

∴ د { س } = { س + ١ }!))! - س!))!

الآن : يتحدد معامل : س)% بمفكوك : { س + ١ } !))!

كذلك : من مفكوك ذات الحدين نعلم أن : $(1+s)^{k} = \sum_{;=0}^{k} \binom{k}{;} ´ s^{k}$

∴ معامل : س)% عندما : ك = ٥٠

⇐ معامل : س)% = $\binom{1001}{50}$

طريقة العزيز سلطان البلوي :

بالاستفادة من المتطابقة المثبتة بقانون المتسلسلة الهندسية السابقة :

$$أ^{2k+1} - ب^{2k+1} = (أ - ب)(أ^{2k} + أ^{2k-1} f + أ^{2k-2} f^{2} + \cdots\cdots ب^{2k})$$

الآن : عندما : م = { س + ١ } ، ب = س ، ن = ٥٠٠

نجد أن :

$$\}(s) = (1+s)^{1001} - s^{1001}$$

$$= ((1+s) - s)((1+s)^{1000} + (1+s)^{999} s + (1+s)^{998} s^{2} + \cdots\cdots s^{1000})$$

$$= ((1+s)^{1000} + (1+s)^{999} s + (1+s)^{998} s^{2} + \cdots\cdots s^{1000})$$

وبعد ذلك يمكن أن نكمل كما في الحل السابق في الأعلى .

⇐ الإجابة الصحيحة هي : جـ

85

إذا كانت :

$$د(س) = (1+س)^{1000} + س(1+س)^{999} + س^{2}(1+س)^{998} + \cdots\cdots + س^{1000}$$

، فإن حاصل جمع المعاملات يساوي :

أ	ب	جـ	د	هـ
2^{1000}	$2^{1000} - 1$	$2^{1000} + 1$	$2^{1001} - 1$	$2^{1001} + 1$

86

ناتج المقدار : $\binom{k}{0} + \binom{k}{2} + \binom{k}{4} + \binom{k}{6} + \cdots\cdots =$

أ	ب	جـ	د	هـ
2^{k}	2^{k-1}	$2^{k} - 1$	2^{2k}	2^{2k-1}

87

ناتج المقدار : $جتا\left(\frac{\pi}{11}\right) + جتا\left(\frac{3\pi}{11}\right) + جتا\left(\frac{5\pi}{11}\right) + جتا\left(\frac{7\pi}{11}\right) + جتا\left(\frac{9\pi}{11}\right) =$

أ	ب	جـ	د	هـ
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{4}$	2	$\frac{2}{3}$

85

إذا كانت :

$د(س) = (س + 1)^{1000} + س \times (س + 1)^{999} + س^{2} \times (س + 1)^{998} + \cdots\cdots + س^{1000}$

، فإن حاصل جمع المعاملات يساوي :

أ- ٢^{1000}	ب- $٢^{1000} - 1$	جـ- $٢^{1000} + 1$	د- $٢^{1001} - 1$	هـ- $٢^{1001} + 1$

الحل :

من السؤال السابق أثبتنا أن :

$د(س) = (س + 1)^{1000} + س \times (س + 1)^{999} + س^{2} \times (س + 1)^{998} + \cdots\cdots + س^{1000}$

$= (س + 1)^{1001} - س^{1001}$

الآن :

نعلم أن حاصل جمع معاملات أي حدودية يتحقق عند : س = ١

$\therefore د\{١\} = \{١ + ١\}^{1001} - \{١\}^{1001} = ٢^{1001} - ١$

$\therefore$ حاصل جمع المعاملات $= ٢^{1001} - ١$

⇐ الإجابة الصحيحة هي : ب

86

ناتج المقدار: $\binom{k}{0} + \binom{k}{٢} + \binom{k}{4} + \binom{k}{6} + \cdots\cdots =$

أ) ٢^{k}	ب) ٢^{k-1}	جـ) $٢^{k} - 1$	د) $٢^{k^{2}}$	هـ) $٢^{k^{2}-1}$

الحل :

نعلم أن :

$$٢^{k} = (1+1)^{k} = \binom{k}{0} + \binom{k}{1} + \binom{k}{٢} + \binom{k}{3} + \cdots\cdots \quad \{١\}$$

كذلك :

$$0 = (1-1)^{k} = \binom{k}{0} - \binom{k}{1} + \binom{k}{٢} - \binom{k}{3} + \cdots\cdots \quad \{٢\}$$

لاحظ في : { ٢ } الحدود الزوجية موجبة والفردية سالبة .

⇐ يمكن نقل الحدود السالبة للطرف الآخر فنجد أن :

$$\binom{k}{1} + \binom{k}{3} + \binom{k}{5} + \binom{k}{7} + \cdots\cdots = \binom{k}{0} + \binom{k}{٢} + \binom{k}{4} + \binom{k}{6} + \cdots\cdots$$

وهذا يعني أن حاصل جمع الحدود الفردية = حاصل جمع الحدود الفردية .

∴ يمكن كتابة : { ١ } على الصورة :

$$٢^{k} = ٢ \left[\binom{k}{0} + \binom{k}{٢} + \binom{k}{4} + \binom{k}{6} + \cdots\cdots \right]$$

$$\therefore\ ٢^{k-1} = \binom{k}{0} + \binom{k}{٢} + \binom{k}{4} + \binom{k}{6} + \cdots\cdots$$

⇐ الإجابة الصحيحة هي : ب

87

ناتج المقدار : $جتا\left(\frac{ط}{11}\right) + جتا\left(\frac{3ط}{11}\right) + جتا\left(\frac{5ط}{11}\right) + جتا\left(\frac{7ط}{11}\right) + جتا\left(\frac{9ط}{11}\right) =$

أ- $\frac{1}{٢}$	ب- $\frac{1}{\sqrt{٢}}$	جـ- $\frac{1}{4}$	د- ٢	هـ- $\frac{٢}{3}$

الحل :

أولا : بضرب البسط والمقام في : $جا\left(\frac{5ط}{11}\right)$ ، يصبح المقدار على الصورة :

$$\frac{جا\left(\frac{5ط}{11}\right)جتا\left(\frac{ط}{11}\right) + جا\left(\frac{5ط}{11}\right)جتا\left(\frac{3ط}{11}\right) + جا\left(\frac{5ط}{11}\right)جتا\left(\frac{5ط}{11}\right) + جا\left(\frac{5ط}{11}\right)جتا\left(\frac{7ط}{11}\right) + جا\left(\frac{5ط}{11}\right)جتا\left(\frac{9ط}{11}\right)}{جا\left(\frac{5ط}{11}\right)}$$

ثانيا : نستخدم متطابقة التحويل من حاصل ضرب إلى جمع ، فيصبح المقدار على الصورة :

$$\frac{\frac{1}{٢}\left[جا\left(\frac{6ط}{11}\right) + جا\left(\frac{4ط}{11}\right) + جا\left(\frac{8ط}{11}\right) + جا\left(\frac{2ط}{11}\right) + جا\left(\frac{10ط}{11}\right) + 0 + جا\left(\frac{12ط}{11}\right) + جا\left(\frac{-2ط}{11}\right) + جا\left(\frac{14ط}{11}\right) + جا\left(\frac{-4ط}{11}\right)\right]}{جا\left(\frac{5ط}{11}\right)}$$

الآن : لاحظ المتطابقة التالية : $جا(أ) + جا(٢ط - أ) = 0$ ، أي حاصل جمع جيب الزاوية مع مكملتها يساوي صفراً ، فنستفيد منها في الاختصارات كالتالي :

$$\frac{\frac{1}{٢}\left[جا\left(\frac{6ط}{11}\right) + \underbrace{جا\left(\frac{4ط}{11}\right) + جا\left(\frac{-4ط}{11}\right)}_{=0} + \underbrace{جا\left(\frac{8ط}{11}\right) + جا\left(\frac{14ط}{11}\right)}_{=0} + \underbrace{جا\left(\frac{2ط}{11}\right) + جا\left(\frac{-2ط}{11}\right)}_{=0} + \underbrace{جا\left(\frac{10ط}{11}\right) + جا\left(\frac{12ط}{11}\right)}_{=0}\right]}{جا\left(\frac{5ط}{11}\right)}$$

الآن : نجد أن المقدار = $\frac{\frac{1}{٢}جا\left(\frac{6ط}{11}\right)}{جا\left(\frac{5ط}{11}\right)} = \frac{\frac{1}{٢}جا\left(ط - \frac{5ط}{11}\right)}{جا\left(\frac{5ط}{11}\right)} = \frac{\frac{1}{٢}جا\left(\frac{5ط}{11}\right)}{جا\left(\frac{5ط}{11}\right)} = \frac{1}{٢}$

⇐ الإجابة الصحيحة هي : أ-

88

خانة الآحاد في العدد : $13^{841} + 17^{508} + 24^{617}$ **تساوي :**

أ- ٢	ب- 3	جـ- 7	د- 4	هـ- 8

89

مجموعة حل المعادلة : $\left[\text{لو}_{٢}(5s^{٢} - 4)\right]^{\text{لو}_{٢}(s + ٢)} = 16$ **هي القيم :**

أ- ٢	ب- ±٢	جـ- - ٢	د- 4	هـ- ±4

90

قيمة : $\dfrac{\text{ظا}^{٢}(20°) - \text{جا}^{٢}(20°)}{\text{ظا}^{٢}(20°) \times \text{جا}^{٢}(20°)} =$

أ- $\frac{1}{٢}$	ب- 1	جـ- $\frac{1}{3}$	د- ٢	هـ- $\frac{1}{4}$

88

خانة الآحاد في العدد : $13^{841} + 17^{508} + 24^{617}$ تساوي :

أ- ٢	ب- 3	جـ- 7	د- 4	هـ- 8

الحل :

فائدة : العدد : ٦ مرفوع إلى أي قوة دوماً آحاده = ٦ . كذلك عند قسمة أي عدد على ١٠ دوماً الباقي هو آحاد العدد .

الآن : باستخدام التطابقات :

١٣ ≡ ٣ { مود ١٠ } ⇐ ١٣$ ≡ ١ { مود ١٠ } ⇐ { ١٣$ }(@! ≡ ١ { مود ١٠ }

⇐ ١٣(\$* ≡ ١ { مود ١٠ } ⇐ ١٣!\$* ≡ ٣ { مود ١٠ } .... { ١ }

كذلك :

١٧ ≡ ٧ { مود ١٠ } ⇐ ١٧$ ≡ ١ { مود ١٠ } ⇐ { ١٧$ }&@! ≡ ١ { مود ١٠ }

⇐ ١٧*(% ≡ ١ { مود ١٠ } .... { ٢ }

أيضا :

٢٤ ≡ ٤ { مود ١٠ } ⇐ ٢٤@ ≡ ٦ { مود ١٠ } ⇐ { ٢٤@ }*(# ≡ ٦ { مود ١٠ }

⇐ ٢٤^!^ ≡ ٦ { مود ١٠ } ⇐ ٢٤ × ٢٤^!^ ≡ ٢٤× ٦ { مود ١٠ }

⇐ ٢٤&!^ ≡ ٤٦ { مود ١٠ }.......... { ٣ }

بجمع : { ١ } + { ٢ } + { ٣ } نجد أن :

١٣!\$* + ١٧*(% + ٢٤&!^ ≡ ١ + ٣ + ٤ ≡ ٨ { مود ١٠ }

∴ الإجابة الصحيحة هي : هـ

89

مجموعة حل المعادلة : $\left[\text{لو}_{٢}(5\text{س}^{٢}-4)\right]^{\text{لو}_{٢}(5\text{س}^{٢}+٢)} = 16$ **هي القيم :**

أ) ٢	ب) ±٢	جـ) - ٢	د) 4	هـ) ±4

الحل :

$\left[\text{لو}_{٢}(5\text{س}^{٢}-4)\right]^{\text{لو}_{٢}(5\text{س}^{٢}+٢)} = 16 \Leftarrow \left[\text{لو}_{٢}(5\text{س}^{٢}-4)\right]^{\text{لو}_{٢}(5\text{س}^{٢}+٢)} = ٢^{4}$

$\Leftarrow \left[\text{لو}_{٢}(5\text{س}^{٢}-4)\right]^{\text{لو}_{٢}(\text{س}+٢)} = 4^{٢}$

$\Leftarrow \left[\text{لو}_{٢}(5\text{س}^{٢}-4)\right]^{\text{لو}_{٢}(\text{س}+٢)} = \left[4\,\text{لو}_{٢}(٢)\right]^{٢\,\text{لو}_{٢}(٢)}$

$\Leftarrow \left[\text{لو}_{٢}(5\text{س}^{٢}-4)\right]^{\text{لو}_{٢}(\text{س}+٢)} = \left[\text{لو}_{٢}(16)\right]^{\text{لو}_{٢}(4)}$

الآن :

عند : $\text{لو}_{٢}(5\text{س}^{٢}-4) = \text{لو}_{٢}(16) \Leftarrow 5\text{س}^{٢}-4 = 16 \Leftarrow \boxed{\text{س} = \pm ٢}$

أو : $\text{لو}_{٢}(\text{س}+٢) = \text{لو}_{٢}(4) \Leftarrow \text{س}+٢ = 4 \Leftarrow \boxed{\text{س} = ٢}$

بالتعويض بقيم : س سنجد قيمة واحدة تحقق المطلوب وهي عند : **س = ٢**

∴ الإجابة الصحيحة هي : أ

90

قيمة : $\dfrac{\text{ظا}^{2}(20°) - \text{جا}^{2}(20°)}{\text{ظا}^{2}(20°) \times \text{جا}^{2}(20°)} =$

أ) $\frac{1}{2}$	ب) 1	جـ) $\frac{1}{3}$	د) 2	هـ) $\frac{1}{4}$

الحل :

بضرب البسط والمقام في : $\text{جتا}^{2}(20°)$ نجد أن :

$$\frac{\text{ظا}^{2}(20°) - \text{جا}^{2}(20°)}{\text{ظا}^{2}(20°) \times \text{جا}^{2}(20°)} = \frac{\text{جتا}^{2}(20°)\text{ظا}^{2}(20°) - \text{جتا}^{2}(20°)\text{جا}^{2}(20°)}{\text{جتا}^{2}(20°)\text{ظا}^{2}(20°) \times \text{جا}^{2}(20°)}$$

$$= \frac{\text{جا}^{2}(20°) - \text{جتا}^{2}(20°)\text{جا}^{2}(20°)}{\text{جا}^{2}(20°) \times \text{جا}^{2}(20°)}$$

$$= \frac{\text{جا}^{2}(20°)\left(1 - \text{جتا}^{2}(20°)\right)}{\text{جا}^{4}(20°)}$$

$$= \frac{1 - \text{جتا}^{2}(20°)}{\text{جا}^{2}(20°)} = \frac{\text{جا}^{2}(20°)}{\text{جا}^{2}(20°)} = 1$$

∴ الإجابة الصحيحة هي : ب

91

عدد حلول المعادلة : $س^{س^2 - 5س + 6} = 1$ تساوي :

أ- 1	ب- 2	جـ- 3	د- 4	هـ- 5

92

إذا كانت : $د(س) + 2د\left(\frac{س + 1428}{س - 1}\right) = 2864 - س$ ، فإن قيمة : $د(1430) =$

أ- 1430	ب- 1428	جـ- 2	د- 4	هـ- 16

93

ناتج المجموع : $\sum_{k=1}^{49} \left(\frac{1}{\sqrt{k + \sqrt{k^2 - 1}}} \right)$ يساوي :

أ- $3 + 2\sqrt{2}$	ب- $2 + 3\sqrt{2}$	جـ- $5 + 3\sqrt{2}$	د- $2 + 2\sqrt{3}$	هـ- $5 + 2\sqrt{3}$

91

عدد حلول المعادلة : $س^{س^2 - 5س + 6} = 1$ تساوي :

أ- 1	ب- ٢	جـ- 3	د- 4	هـ- 5

الحل :

بأخذ لوغاريتم الطرفين ، نجد أن :

$لو\ (س)^{س^2 - 5س + 6} = لو(1) \Leftarrow (س^2 - 5س + 6)\ لو|س| = 0$

الآن :

إما : $س^2 - ٥س + ٦ = ٠ \Leftarrow \{س - ٢\}\{س - ٣\} = ٠ \Leftarrow$ **س = ٢** ، **س = ٣**

أو : $لو|س| = ٠ \Leftarrow$ **س = ١** ، **س = - ١** .

وبتجربة القيم نجد أن جميعها تحقق المعادلة .

∴ قيم س التي تحقق المعادلة ضمن المجموعة : { - ١ ، ١ ، ٢ ، ٣ }

⟸ عدد القيم = ٤ قيم .

∴ الإجابة الصحيحة هي : د

92

إذا كانت : $د(س) + ٢\,د\left(\frac{1428 + س}{1 - س}\right) = 2864 - س$ ، **فإن قيمة :** $د(1430) =$

أ- 1430	ب- 1428	جـ- ٢	د- 4	هـ- 16

الحل :

عند التعويض بقيمة : س = ٢ نجد أن :

د { ٢ } + ٢ × د { ١٤٣٠ } = ٢٨٦٢ ....{ ١ }

وعند التعويض بقيمة : س = ١٤٣٠ نجد أن :

د { ١٤٣٠ } + ٢ × د { ٢ } = ١٤٣٤ ....{ ٢ }

بضرب المعادلة : { ١ } × ٢ تصبح على الصورة :

٢ × د { ٢ } + ٤ × د { ١٤٣٠ } = ٥٧٢٤

⇐ ٢ × د { ٢ } = ٥٧٢٤ - ٤ × د { ١٤٣٠ } ....{ ٣ }

بتعويض قيمة : ٢ × د { ٢ } من المعادلة { ٣ } في المعادلة : { ٢ } نجد أن :

د { ١٤٣٠ } + ٥٧٢٤ - ٤ × د { ١٤٣٢ } = ١٤٣٤

⇐ - ٣ × د { ١٤٣٠ } = - ٤٢٩٠

⇐ د { ١٤٣٠ } = ١٤٣٠

∴ الإجابة الصحيحة هي : أ-

93

ناتج المجموع : $\sum_{k=1}^{49}\left(\frac{1}{\sqrt{k+\sqrt{k^2-1}}}\right)$ **يساوي :**

أ- $3+2\sqrt{2}$	ب- $2+3\sqrt{2}$	جـ- $5+3\sqrt{2}$	د- $2+2\sqrt{3}$	هـ- $5+2\sqrt{3}$

الحل :

لو نفك بعض الحدود لعله يتضح لنا أكثر طريقة لاختصار المجموع :

$$\sum_{k=1}^{49}\left(\frac{1}{\sqrt{k+\sqrt{k^2-1}}}\right)=\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{0}}}+\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{8}}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{49+\sqrt{49^2-1}}}$$

∴ لعل الفكرة الأوضح أولاً كيفية جعل ماتحت الجذر الكبير مربع كامل ، بعد ذلك سيبقى الجذر الصغير فنفكر في الضرب في المرافق ، ومن ثم نطبق فكرة متسلسلات الحذف .

لاحظ :

$$\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{0}}}=1$$

$$\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}=\frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{8}}}=\frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{4}{2}}+\sqrt{\frac{2}{2}}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{4}{2}}+\sqrt{\frac{2}{2}}}$$

لاحظ : عندما كانت : ن = ٢ كان بسط الجذر الأول = ١ ، وبسط الجذر الثاني = ٣ ، كذلك

عندما كانت : ن = ٣ كان بسط الجذر الأول = ٢ ، وبسط الجذر الثاني = ٤

∴ يمكن إعادة كتابة الصورة العامة كالتالي :

$$\frac{1}{\sqrt{k+\sqrt{k^2-1}}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{k+1}{2}}+\sqrt{\frac{k-1}{2}}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{k+1}{2}}+\sqrt{\frac{k-1}{2}}}$$

الآن : بالضرب في المرافق تصبح الصورة العامة على الشكل :

$$\frac{1}{\sqrt{k+\sqrt{k^2-1}}} = \frac{\sqrt{\frac{k+1}{2}}-\sqrt{\frac{k-1}{2}}}{\frac{k+1}{2}-\frac{k-1}{2}} = \frac{\sqrt{\frac{k+1}{2}}-\sqrt{\frac{k-1}{2}}}{\frac{2}{2}} = \sqrt{\frac{k+1}{2}}-\sqrt{\frac{k-1}{2}}$$

الآن : بالتعويض بالصورة الأخيرة سنجد المتسلسلة تحولت لمتسلسلة حذف كالتالي :

$$\sum_{k=1}^{49}\frac{1}{\sqrt{k+\sqrt{k^2-1}}} = \sqrt{\frac{k+1}{2}}-\sqrt{\frac{k-1}{2}}$$

$$= \left(\sqrt{\frac{2}{2}}-\sqrt{\frac{0}{2}}\right)+\left(\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)+\left(\sqrt{\frac{4}{2}}-\sqrt{\frac{2}{2}}\right)+\left(\sqrt{\frac{5}{2}}-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)+\cdots\cdots+\left(\sqrt{\frac{50}{2}}-\sqrt{\frac{48}{2}}\right)$$

كيف نعرف الحدود التي ستبقى ؟

لاحظ :

الحد التاسع والأربعون سيبقى منه : $\sqrt{\frac{50}{2}}$ لا يوجد معكوس له بعده .

الحد الثامن والأربعون سيبقى منه : $\sqrt{\frac{49}{2}}$ لا يوجد معكوس له بعده .

الحد السابع والأربعون وفيه : $\sqrt{\frac{48}{2}}-\sqrt{\frac{46}{2}}$ وكلها ستحذف لوجود معكوسها بعدها وقبلها

∴ ما سيبقى كما هو واضح :

$$\sqrt{\frac{0}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{49}{2}}+\sqrt{\frac{50}{2}} = 0-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{7}{\sqrt{2}}+5 = \frac{6}{\sqrt{2}}+5$$

$$\sum_{k=1}^{49}\frac{1}{\sqrt{k+\sqrt{k^2-1}}} = 5+3\sqrt{2}$$

∴ الإجابة الصحيحة هي : جـ

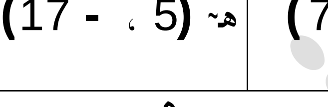
94

إذا كانت : $\log_{\frac{1}{8}} \log_{\frac{1}{4}} \log_{\frac{1}{٢}} (س) = \frac{1}{3}$ ، **فإن :** س =

أ- $\frac{1}{٢}$	ب- $\frac{1}{\sqrt{٢}}$	جـ- $\frac{1}{4}$	د- $\frac{1}{٢\sqrt{٢}}$	هـ- 4

95

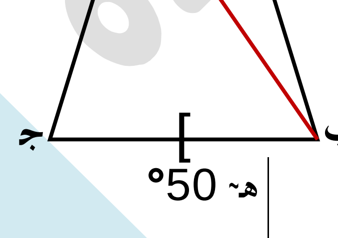
إذا كانت : (أ ، ب) **، تعني القاسم المشترك الأعظم لـ** أ **و** ب **، فإن قيم :**
س و ص **التي تحقق المعادلة :** 754س + 221ص = (754 ، 221)
هي الزوج المرتب :



أ- (7 ، 5)	ب- (5 ، 7)	جـ- (5 ، 17)	د- (5 ، - 7)	هـ- (5 ، - 17)

96

المثلث : أبحـ **فيه :** $\hat{أ}$ = 20° ، $\hat{ب}$ = $\hat{حـ}$ = 80°
، |أ د| = |ب حـ| **، فإن قياس الزاوية :** $\widehat{أبد}$ =



أ- 10°	ب- 20°	جـ- 30°	د- 40°	هـ- 50°

94

إذا كانت : $\log_{\frac{1}{8}}\left(\log_{\frac{1}{4}}\left(\log_{\frac{1}{٢}}(س)\right)\right) = \frac{1}{3}$ ، **فإن :** س =

أ) $\frac{1}{٢}$	ب) $\frac{1}{\sqrt{٢}}$	جـ) $\frac{1}{4}$	د) $\frac{1}{٢\sqrt{٢}}$	هـ) 4

الحل :

$$\log_{\frac{1}{8}}\left(\log_{\frac{1}{4}}\left(\log_{\frac{1}{٢}}(س)\right)\right) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{4}}\left(\log_{\frac{1}{٢}}(س)\right) = \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{4}}\left(\log_{\frac{1}{٢}}(س)\right) = \frac{1}{٢}$$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{٢}}(س) = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{٢}}$$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{٢}}(س) = \frac{1}{٢}$$

$$\Leftrightarrow س = \left(\frac{1}{٢}\right)^{\frac{1}{٢}} \Leftrightarrow س = \frac{1}{\sqrt{٢}}$$

∴ الإجابة الصحيحة هي : ب

95

إذا كانت : (أ ، ب) ، تعني القاسم المشترك الأعظم لـ أ و ب ، فإن قيم :

س و ص التي تحقق المعادلة : 754s + 221w = (754 ، 221)

هي الزوج المرتب :

أ) (7 ، 5)	ب) (5 ، 7)	جـ) (5 ، 17)	د) (5 ، - 7)	هـ) (5 ، - 17)

الحل : بتطبيق مباشر لخوارزمية القسمة نجد أن :

754 = 221 × 3 + 91

221 = 91 × ٢ + 39

91 = 39 × ٢ + 13

39 = 13 × 3 + 0

∴ ق . م . أ { ٧٥٤ ، ٢٢١ } = ١٣

الآن : نسير بصورة عكسية حتى نصل لتكوين معادلة على صورة :

٧٥٤ × س + ٢٢١ × ص = ١٣

13 = 91 - 39 × ٢

= 91 - (221 - 91 × ٢) × ٢

= 91 - 221 × ٢ + 91 × 4

= 5 × 91 - ٢ × 221

= 5 × (754 - 221 × 3) - ٢ × 221

= 5 × 754 - 221 × 15 - ٢ × 221

= 5 × 754 - 17 × 221

∴ س = ٥ ، ص = - ١٧ ⇐ الإجابة الصحيحة هي : هـ

96

المثلث : أ ب حـ فيه : $\widehat{أ}$ = 20° ، $\widehat{ب}$ = $\widehat{حـ}$ = 80°

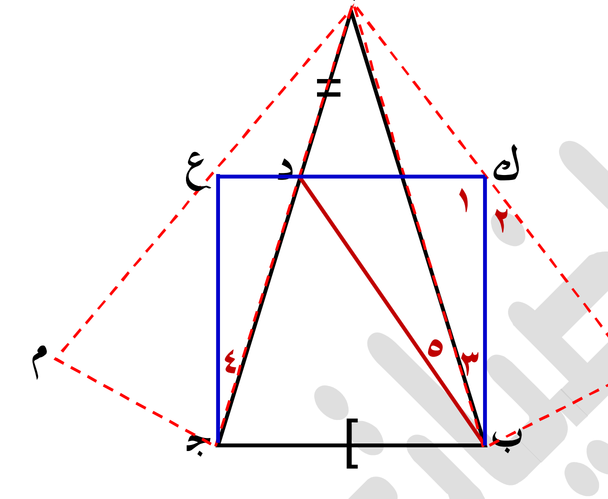
، |أ د| = |ب حـ| ، فإن قياس الزاوية : $\widehat{أ ب د}$ =

أ- 10°	ب- 20°	جـ- 30°	د- 40°	هـ- 50°

الحل :

برسم مثلثين مطابقين للمثلث : أ ب جـ من الضلعين :

أ ب ، أ جـ بالتناظر ، نستنتج التالي :



{ ١ } ' هـ ب ' = ' ب جـ ' بالتناظر .

$\widehat{ب_3}$ = $\widehat{ب_5}$ = $\widehat{حـ_4}$ من تطابق المثلثات الثلاثة .

{ ٢ } ; $\widehat{uأ}$ = 60° مجموع زوايا رؤوس المثلثات الثلاثة .

{ ٣ } ' أ ك ' = ' أ ع ' من تطابق المثلثات الثلاثة ⇐ Δ أ ك ع متطابق الأضلاع .

{ ٤ } ∴ ' أ ك ' = ' ك ع ' = ' هـ ب ' = ' ب جـ '

{ ٥ } ∴ ' ك ع ' = ' ب جـ '

{ ٦ } ' ك ب ' = ' ع جـ ' من تطابق المثلثات الثلاثة .

{ ٧ } ∴ الشكل : ك ب ج ع فيه : كل ضلعين متقابلين متطابقين ومتساويين

{ ٨ } ⇐ الشكل يمثل متوازي أضلاع : فيه كل زاويتين متقابلتين متطابقتين .

{ ٩ } $\widehat{أ\,;\,u} = 60°$ ⇐ ك$_{١}$ + ك$_{م}$ = ١٢٠ْ

{ ١٠ } في المثلث : ك هـ ب مجموع زواياه كالتالي :

١٢٠ْ - ك$_{١}$ + ٨٠ْ - ب$_{٣}$ + ٨٠ْ = ١٨٠ْ ⇐ ك$_{١}$ + ب$_{٣}$ = ١٠٠ْ .

ولكن :

ك$_{١}$ = ٨٠ْ + ج$_{٤}$ ⇐ ٨٠ + ج$_{٤}$ + ب$_{٣}$ = ٨٠

⇐ ج$_{٤}$ + ب$_{٣}$ = ٢٠ْ

⇐ ٢ ج$_{٤}$ = ٢٠ **⇐ ج$_{٤}$ = ١٠ْ**

∴ الإجابة الصحيحة هي : ~م

97

إذا كانت : S ¹ W ، حيث :

س@ = ص + ١٤٣٠ ، ص@ = س + ١٤٣٠ ، فإن : س × ص =

أ- 1428	ب- 1429	جـ- 1430	د- - 1428	هـ- - 1429

98

عدد قيم : k ، التي تجعل المقدار : ٢^{8} + ٢^{11} + ٢^{k} مربع كامل

تساوي :

أ- 1	ب- ٢	جـ- 3	د- 4	هـ- 5

99

في المثلث : أ ب جـ فيه : ; } || f [، ; i || f }

، |أ i| = 4 ، |i }| = 6

، فإن طول الضلع : |[}| =

أ- 5	ب- 10	جـ- 15	د- 20	هـ- 25

97

إذا كانت : S ¹ W ، **حيث :**

س@ = ص + ١٤٣٠ ، ص@ = س + ١٤٣٠ ، **فإن :** س × ص =

أ- 1428	ب- 1429	جـ- 1430	د- 1428 -	هـ- 1429 -

الحل :

نفرض : س@ = ص + ١٤٣٠ ....{ ١ } ، ص@ = س + ١٤٣٠ ....{ ٢ }

بطرح : { ١ } - { ٢ } ، نجد أن :

س@ - ص@ = ص - س ⇐ { س + ص }{ س - ص } = - { س - ص }

⇐ س + ص = - ١ ....{ ٣ }

بجمع : { ١ } + { ٢ } ، نجد أن :

س@ + ص@ = س + ص + ٢٨٦٠ ⇐ س@ + ص@ = - ١ + ٢٨٦٠

⇐ س@ + ص@ = ٢٨٥٩ ....{ ٤ }

الآن :

{ س + ص }@ = س@ + ص@ + ٢س ص ـــ بالتعويض من { ٣ } ، { ٤ } ـــ نجد أن :

{ - ١ }@ = ٢٨٥٩ + ٢س ص ⇐ ٢س ص = - ٢٨٥٨

⇐ س × ص = - ١٤٢٩

∴ الإجابة الصحيحة هي : هـ

98

عدد قيم : K ، التي تجعل المقدار : ٢^{8} + ٢^{11} + ٢^{k} مربع كامل تساوي :

أ- 1	ب- ٢	جـ- 3	د- 4	هـ- 5

الحل :

نفرض أن : م@ = ٢* + ٢!! + ٢ن ⇐ ٢ن = م@ - {٢* + ٢!!}

⇐ ٢ن = م@ - ٢* {١ + ٢#}

⇐ ٢ن = م@ - ٢* × ٣@

⇐ ٢ن = م@ - {٢$ × ٣}@

⇐ ٢ن = {م - ٢$ × ٣}{م + ٢$ × ٣}

⇐ ٢ن = {م - ٤٨}{م + ٤٨}

الآن :

نفرض أن : ن = أ + ب ⇐ $٢^{أ}$ × $٢^{ب}$ = {م - ٤٨}{م + ٤٨}

∴ $٢^{أ}$ = م - ٤٨ ⇐ م = $٢^{أ}$ + ٤٨ ، $٢^{ب}$ = م + ٤٨ ⇐ م = $٢^{ب}$ - ٤٨

⇐ $٢^{أ}$ + ٤٨ = $٢^{ب}$ - ٤٨ ⇐ $٢^{ب}$ - $٢^{أ}$ = ٩٦

⇐ $٢^{أ}$ × {$٢^{ب_أ}$ - ١} = ٢% × ٣

ولكن : $٢^{ب_أ}$ - ١ عدد فردي ⇐ $٢^{أ}$ = ٢% ⇐ **أ = ٥**

كذلك : $٢^{ب_أ}$ - ١ = ٣ ⇐ $٢^{ب_أ}$ = ٤ ⇐ $٢^{ب_أ}$ = ٢@

⇐ ب - أ = ٢ ⇐ ب - ٥ = ٢ ⇐ **ب = ٧**

∴ **ن = ١٢** ⇐ الإجابة الصحيحة هي : أ-

99

في المثلث : أ ب حـ فيه : } f || i ; ، [f || } ;

، | i أ | = 4 ، | } i | = 6

، فإن طول الضلع : | [} | =

أ) 5	ب) 10	ج) 15	د) 20	هـ) 25

الحل :

المثلثين : م ك هـ ، م ب د متشابهين لتطابق الزوايا ومنه نستنتج أن :

$$\frac{|f أ|}{|; أ|} = \frac{|} أ|}{|i أ|} \; Ü \; \frac{|f أ|}{|; أ|} = \frac{4}{10}$$

المثلثين : م ك د ، م ب جـ متشابهين لتطابق الزوايا ومنه نستنتج أن :

$$\frac{|f أ|}{|; أ|} = \frac{|[أ|}{|} أ|} \; Ü \; \frac{4}{10} = \frac{10}{|} أ| + |[}|} \; Ü \; \frac{4}{10} = \frac{10}{10 + |[}|}$$

Ü 40 + 4|[}| = 100

Ü 4|[}| = 60 Ü **|[}| = 15**

∴ الإجابة الصحيحة هي : جـ

100

إذا كانت : لو$_s$(م) = 1430 ، لو$_w$(م) = 130 ، لو$_{uws}$(م) = 110

، فإن : لو$_u$(م) =

أ- 10	ب- 11	جـ- 13	د- 130	هـ- 1430

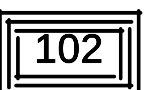
101

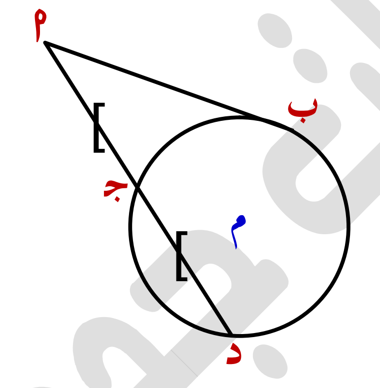
قيمة : س الحقيقية التي تحقق المعادلة :

$$\sqrt[3]{1+\sqrt{s}} + \sqrt[3]{1-\sqrt{s}} = \sqrt[3]{5}$$

، تساوي :

أ- $\frac{1}{5}$	ب- $\frac{٢}{5}$	جـ- $\frac{3}{5}$	د- $\frac{4}{5}$	هـ- 5





أب مماس للدائرة : ا ، | منتصف : أ}

، إذا كان : |أ f| = 5√٢ ، **فإن :** |أ}| =

أ- 5	ب- 10	جـ- 5√٢	د- √٢	هـ- 25

100

إذا كانت : $لو_{s}$ (حـ) = 1430 ، $لو_{w}$ (حـ) = 130 ، $لو_{uws}$ (حـ) = 110

، **فإن :** $لو_{u}$ (حـ) =

ه~ 1430	د~ 130	جـ~ 13	ب~ 11	ٳ~ 10

الحل :

بتطبيق خاصية مهمة من خصائص اللوغاريتمات وهي : $لو_{s}$ (حـ) = $\frac{لو(حـ)}{لو(s)}$.

الآن :

{ ١ } $لو_{s}$ (حـ) = 1430 Ü $\frac{لو(حـ)}{لو(s)}$ = 1430 Ü لو (s) = $\frac{لو(حـ)}{1430}$

{ ٢ } $لو_{w}$ (حـ) = 130 Ü $\frac{لو(حـ)}{لو(w)}$ = 130 Ü لو (w) = $\frac{لو(حـ)}{130}$

الآن :

$لو_{uws}$ (حـ) = 110 Ü $\frac{لو(حـ)}{لو(uws)}$ = 110 Ü لو(حـ) = 110لو(uws)

Ü لو (حـ) = 110´[لو(w) + لو (حـ) + لو(u)]

الآن :

بالتعويض من : { ١ } ، { ٢ } :

لو(حـ) = 110´ $\left[\frac{لو(حـ)}{1430} + \frac{لو(حـ)}{130} + لو(u)\right]$ = $\frac{لو(حـ)}{13}$ + $\frac{١١لو(حـ)}{13}$ + ١١٠لو(u)

Ü لو(حـ) = $\frac{١٢لو(حـ)}{13}$ + ١١٠لو(u) Ü $\frac{لو(حـ)}{لو(u)}$ = 1430 Ü $لو_{u}$ (حـ) = 1430

∴ الإجابة الصحيحة هي : ه~

101

قيمة : $س$ الحقيقية التي تحقق المعادلة :

$$\sqrt[3]{1+\sqrt{س}} + \sqrt[3]{1-\sqrt{س}} = \sqrt[3]{5}$$ ، **تساوي :**

أ- $\frac{1}{5}$	ب- $\frac{2}{5}$	جـ- $\frac{3}{5}$	د- $\frac{4}{5}$	هـ- 5

الحل :

تذكر دوماً :

في مثل هذه المسألة نتذكر دوماً متطابقة مكعب كامل :

$$(أ + ب)^3 = أ^3 + ٣أ^2ب + ٣أب^2 + ب^3$$

$$= أ^3 + ب^3 + ٣أب(أ + ب)$$ ـــ وهذه الصورة الأفضل دوماً في حل المسائل ـــ

لاحظ الآن :

$أ = \sqrt[3]{1+\sqrt{س}}$ ، $ب = \sqrt[3]{1-\sqrt{س}}$ ، $أ + ب = \sqrt[3]{5}$

الآن :

بالتعويض في المتطابقة في صورتها الثانية نجد أن :

$$\Rightarrow 5 = 1 + \sqrt{س} + 1 - \sqrt{س} + 3 \times \sqrt[3]{1 - س} \times \sqrt[3]{5}$$

$$\Rightarrow 5 = 2 + 3 \times \sqrt[3]{1 - س} \times \sqrt[3]{5}$$

$$\Rightarrow 3 = 3 \times \sqrt[3]{1 - س} \times \sqrt[3]{5}$$

$$\Rightarrow 1 = \sqrt[3]{1 - س} \times \sqrt[3]{5}$$

$$\Rightarrow 1 = 5 \times (1 - س) \Rightarrow 1 - س = \frac{1}{5} \Rightarrow \boxed{س = \frac{4}{5}}$$

∴ الإجابة الصحيحة هي : د

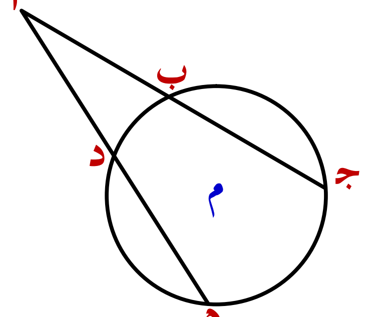
102

أب مماس للدائرة : م ، ج منتصف : أد

، إذا كان : $|أب| = 5\sqrt{2}$ ، فإن : $|أد| =$

أ) 5	ب) 10	ج) $5\sqrt{2}$	د) $\sqrt{2}$	هـ) 25

الحل :



تذكير بنظرية مهمة : { نظرية قوة نقطة }

إذا كانت : م دائرة ، أ نقطة بحيث :

ينطلق من النقطة قاطعان يقطعان الدائرة في : ب ج ، د هـ على التوالي كما هو موضح في الرسم ،

فإن : $|أب| \times |أج| = |أد| \times |أهـ|$.

حالة خاصة : { وتوجد حالات أخرى لعلنا نشرحها في مسائل جديدة }

إذا انطبقت النقطة : ج على النقطة : ب ، وفي هذه الحالة يصبح : أ ب مماساً للدائرة تبقى النظرية متحققة ، وتكتب العلاقة على الصورة : $|أب|^2 = |أد| \times |أهـ|$.

الآن : حل التطبيق في الأعلى أصبح واضحاً جداً ، وهو تطبيق مباشر على الحالة الخاصة كالتالي :

$\therefore |أب|^2 = |أج| \times |أد|$

$\Leftarrow (5\sqrt{2})^2 = \frac{1}{2}|أد|^2$ ـــ لاحظ $|أج| = \frac{1}{2}|أد|$ لأن : ج منتصف : أد ـــ

$\Leftarrow 50 = \frac{1}{2}|أد|^2 \Leftarrow 100 = |أد|^2 \Leftarrow |أد| = 10$ وحدات .

$\therefore$ الإجابة الصحيحة هي : ب

103

عدد الأزواج المرتبة : (s ، w) التي تحقق :

لو $\left(s^3 + \frac{1}{3}w^3 + \frac{1}{9}\right) =$ لو(s) + لو(w) ، **تساوي :**

أ- 1	ب- ٢	جـ- 3	د- 4	هـ- 5

104

إذا كانت : $\{(s) = \frac{4^s}{4^s + ٢}$ ، **فإن قيمة :** $\sum_{k=1}^{1000} \{\left(\frac{k}{1001}\right) =$

أ- 1	ب- 250	جـ- 500	د- 1000	هـ- 1500

105

أكبر عدد يقسم : ١٠٠١٠٠١٠٠١ يكون أقل من : ١٠٠٠٠ ، يساوي :

أ- 101	ب- 1001	جـ- 9900	د- 9901	هـ- 9001

103

عدد الأزواج المرتبة : (s ، w) التي تحقق :

$$\text{لو}\left(s^3 + \frac{1}{3}w^3 + \frac{1}{9}\right) = \text{لو}(s) + \text{لو}(w)$$ ، **تساوي :**

أ- 1	ب- ٢	جـ- 3	د- 4	هـ- 5

الحل :

تذكير : متباينة الوسطين : الحسابي والهندسي :

إذا كانت لدينا مجموعة من الأعداد : $أ_1$ ، $أ_2$ ، $أ_3$ ، .... ، $أ_ن$ ، فإن :

الوسط الحسابي = $\frac{أ_1 + أ_2 + أ_3 + \cdots + أ_k}{k}$

الوسط الهندسي = $\sqrt[k]{أ_1 \times أ_2 \times أ_3 \times \cdots \times أ_k}$

وعموماً :

$$\frac{أ_1 + أ_2 + أ_3 + \cdots + أ_k}{k} \geq \sqrt[k]{أ_1 \times أ_2 \times أ_3 \times \cdots \times أ_k}$$

وفي حالة أن : $أ_1 = أ_2 = أ_3 = \cdots = أ_ن$ ، فإن الوسطين متساويين .

الآن :

من خصائص اللوغاريتمات نجد أن :

$$\text{لو}\left(s^3 + \frac{1}{3}w^3 + \frac{1}{9}\right) = \text{لو}(s\,w) \Leftarrow s^3 + \frac{1}{3}w^3 + \frac{1}{9} = s \times w$$

الآن :

من متباينة الوسطين : الحسابي والهندسي نجد أن :

$$\sqrt[3]{\frac{1}{9} + {}^3w\frac{1}{3} + {}^3s} \quad £ \quad \frac{\frac{1}{9} + {}^3w\frac{1}{3} + {}^3s}{3}$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{9} + {}^3w\frac{1}{3} + {}^3s} \;´3 \quad £ \quad \frac{1}{9} + {}^3w\frac{1}{3} + {}^3s \quad Ü$$

$$w\;´\;s \quad £ \quad \frac{1}{9} + {}^3w\frac{1}{3} + {}^3s \quad Ü$$

الآن :

سنبحث فقط عن القيم التي تحقق أن : $w\;´\;s = \frac{1}{9} + {}^3w\frac{1}{3} + {}^3s$

وهذا لن يتحقق إلا إذا كان :

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt[3]{3}} = w} \;،\; \boxed{\frac{1}{\sqrt[3]{9}} = s} \quad Ü \quad \frac{1}{9} = {}^3w\frac{1}{3} = {}^3s$$

⇐ عدد الأزواج المرتبة التي تحقق المعادلة زوج واحد .

∴ الإجابة الصحيحة هي : ~م

104

إذا كانت : $د(س) = \frac{4^{س}}{4^{س} + ٢}$ ، **فإن قيمة :** $\sum_{ك = 1}^{1000} د\left(\frac{ك}{1001}\right) =$

أ- 1	ب- 250	ج- 500	د- 1000	هـ- 1500

الحل :

كيف جاءت فكرة السؤال ؟

فكرة السؤال جاءت من حاصل جمع الكسر ومكمله للواحد ومن هذه الفكرة نستطيع أن ننشئ مسائل كثيرة جداً ، طبعاً هذه الفكرة إذا كان البسط أصغر من المقام .

لاحظ أن :

$$د(س) = \frac{4^{س}}{4^{س} + ٢} \quad ، \quad د(1 - س) = \frac{4^{1 - س}}{4^{1 - س} + ٢}$$

ولكن :

$$د(س) + د(1 - س) = \frac{4^{س}}{4^{س} + ٢} + \frac{4^{1 - س}}{4^{1 - س} + ٢}$$

$$= \frac{4^{س}(٢ + 4^{1 - س}) + 4^{1 - س}(٢ + 4^{س})}{(٢ + 4^{1 - س})(٢ + 4^{س})}$$

$$= \frac{4^{س} \times ٢ + 4 + 4^{1 - س} \times ٢ + 4}{4 + 4^{س} \times ٢ + 4^{1 - س} \times ٢ + 4}$$

$$= \frac{4^{س} \times ٢ + 4^{1 - س} \times ٢ + 8}{4^{س} \times ٢ + 4^{1 - س} \times ٢ + 8} = 1$$

الآن :

$$د\left(\frac{1}{1001}\right) = \frac{4^{\frac{1}{1001}}}{4^{\frac{1}{1001}} + ٢} \quad ، \quad د\left(1 - \frac{1}{1001}\right) = د\left(\frac{1000}{1001}\right) = \frac{4^{\frac{1000}{1001}}}{4^{\frac{1000}{1001}} + ٢}$$

ولكن : $د\left(\frac{1}{1001}\right) + د\left(\frac{1000}{1001}\right) = 1$

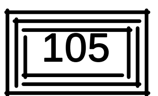
∴ أن ناتج الحد الأول والأخير = الواحد

هذا يعني أن مجموع كل حدين ــ الحد ومكمله ــ يساوي الواحد .

∵ عدد الحدود = ١٠٠٠ حد ⇐ مجموع الحدود = ٥٠٠

$$١ \quad \sum_{k=1}^{1000} د\left(\frac{k}{1001}\right) = 500$$

∴ الإجابة الصحيحة هي : جـ



أكبر عدد يقسم : ١٠٠١٠٠١٠٠١ يكون أقل من : ١٠٠٠٠ ، يساوي :

أ- 101	ب- 1001	جـ- 9900	د- 9901	هـ- 9001

الحل :

في مثل هذا السؤال نفكر بتحليل العدد نجد أن :

$$١٠٠١٠٠١٠٠١ = ١٠٠٠٠٠٠ \times ١٠٠١ + ١٠٠١$$

$$= \{ ١٠^{٦} + ١ \} \times ١٠٠١$$

والمقدار : $١٠^{٦} + ١ > ١٠٠١$

الآن :

نحلل المقدار : $١٠^{٦} + ١$ باستخدام متطابقة مجموع مكعبين ، ولتسهيل التحليل نفرض أن : $س = ١٠$

$$\therefore\ س^{٦} + ١ = \{س^{٢}\}^{٣} + ١ = \{ س^{٢} + ١ \}\{ س^{٤} - س^{٢} + ١ \}$$

والمقدار : $س^{٤} - س^{٢} + ١ > س^{٢} + ١$

لاحظ أن : المقدار : $س^{٤} - س^{٢} + ١$ لا يمكن تحليله ضمن مجموعة الأعداد الحقيقية

$$\Leftarrow س^{٤} - س^{٢} + ١ = ١٠^{٤} - ١٠^{٢} + ١ = ١٠٠٠٠ - ١٠٠ + ١ = ٩٩٠١$$

∴ أكبر عدد يقسم المقدار وأقل من : ١٠٠٠٠ هو ٩٩٠١ .

∴ الإجابة الصحيحة هي : د

106

إذا كان : أ ، ب عددين صحيحين موجبين مختلفين ، فإن عدد الأزواج المرتبة : (أ ، ب) التي تحقق أن : أ ´ ب = ٢ ´ (أ + f) ، تساوي :

أ- 1	ب- ٢	جـ- 3	د- 4	هـ- 5

107

قيمة المقدار :

$$\frac{(1337-13)(1337-7)}{(37-13)(37-7)} + \frac{(1337-37)(1337-13)}{(7-37)(7-13)} + \frac{(1337-37)(1337-7)}{(13-37)(13-7)} =$$

أ- 1337	ب- 37	جـ- 13	د- 7	هـ- 1

108

عدد قيم : أ في الفترة : ٠ ⩽ أ ⩽ ط التي تحقق :

جا(3أ)[جا(3أ) - جتا(أ)] = جا(أ)[جا(أ) - جتا(3أ)] ، تساوي :

أ- 1	ب- ٢	جـ- 3	د- 4	هـ- 5

106

إذا كان : أ ، ب عددين صحيحين موجبين مختلفين ، فإن عدد الأزواج المرتبة : (أ ، ب) التي تحقق أن : أ ´ ب = ٢ ´ (أ + f) ، تساوي :

أ- 1	ب- ٢	جـ- 3	د- 4	هـ- 5

الحل :

م × ب = ٢ × { م + ب } ⇐ م × ب = ٢م + ٢ب

⇐ مب - ٢م - ٢ب = ٠

⇐ مب - ٢م - ٢ب + ٤ = ٤

⇐ { م - ٢ } { ب - ٢ } = ٤

الآن :

بما أن العددين صحيحين موجبين ومختلفين ⇐ يمكن تحليل الطرف الأيسر إلى : ٤ × ١

∴ { م - ٢ } { ب - ٢ } = ٤ × ١ ⇐ سيكون لدينا حالتان هما :

إما : م - ٢ = ٤ ⇐ م = ٦ ، ب - ٢ = ١ ⇐ ب = ٣

أو : م - ٢ = ١ ⇐ م = ٣ ، ب - ٢ = ٤ ⇐ ب = ٦

∴ عدد الأزواج المرتبة التي تحقق المراد = ٢ ، وهما : { ٦ ، ٣ } ، { ٣ ، ٦ }

∴ الإجابة الصحيحة هي : ب

107

قيمة المقدار :

$$\frac{(7-1337)(37-1337)}{(7-13)(37-13)} + \frac{(37-1337)(13-1337)}{(37-7)(13-7)} + \frac{(13-1337)(7-1337)}{(13-37)(7-37)} =$$

أ) 1337	ب) 37	جـ) 13	د) 7	هـ) 1

الحل :

الفكرة : توحيد مقامات واختصارات .

الآن : نفرض المقدار = ك نجري العمليات التقليدية ، فنجد أن :

$$\frac{1330\times1300}{6\times24} - \frac{1300\times1324}{6\times30} + \frac{1324\times1330}{24\times30} = \;;$$

$$\frac{30\times1330\times1300 - 24\times1300\times1324 + 6\times1324\times1330}{6\times24\times30} =$$

الآن : نجري بعض العمليات على البسط :

$$(30\times1300 - 6\times1324)1330 = 30\times1330\times1300 - 6\times1324\times1330$$

$$(24\times1300 - 6\times1300 - 6\times1324)1330 =$$

$$(24\times1300 - 24\times6)1330 =$$

$$24\times1294\times1330 - \;=$$

الآن :

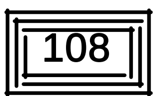
$$(1294\times1330 - 1300\times1324)\times24 = 24\times1294\times1330 - 24\times1300\times1324$$

$$(1294\times1330 - 1294\times1324 + 6\times1324)\times24 =$$

$$6\times24\times30 = (1294\times6 - 6\times1324)\times24 =$$

∴ البسط = المقام ⇐ المقدار = ك = ١ .

∴ الإجابة الصحيحة هي : هـ



عدد قيم : ٩ في الفترة : ٠ ⩽ ٩ ⩽ ط التي تحقق :

جا(3أ)[جا(3أ) - جتا(أ)] = جا(أ)[جا(أ) - جتا(3أ)] ، تساوي :

أ- 1	ب- ٢	جـ- 3	د- 4	هـ- 5

الحل :

جا(3أ)[جا(3أ) - جتا(أ)] = جا(أ)[جا(أ) - جتا(3أ)]

⇐ جا٢(3أ) - جا(3أ)جتا(أ) = جا٢(أ) - جا(أ)جتا(3أ)

⇐ جا٢(3أ) - جا٢(أ) = جا(3أ)جتا(أ) - جا(أ)جتا(3أ)

⇐ (جا(3أ) - جا(أ))(جا(3أ) - جا(أ)) = جا(٢أ)

⇐ (٢جتا(٢أ) جا(أ))(٢جا(٢أ) جتا(أ)) = جا(٢أ)

⇐ ٢جا(٢أ)جتا(٢أ) ´ ٢جا(أ)جتا(أ) = جا(٢أ)

⇐ جا(4أ) جا(٢أ) = جا(٢أ)

⇐ جا(4أ) جا(٢أ) - جا(٢أ) = 0

⇐ جا(٢أ)(جا(4أ) - 1) = 0

∴ إما : جا(٢أ) = 0 ⇐ ٢أ = ٠ ، ط ، ٢ط ⇐ ٩ = ٠ ، $\frac{ط}{٢}$ ، ط

أو : جا(4أ) - 1 = 0 ⇐ جا(4أ) = 1 ⇐ ٤أ = $\frac{'}{٢}$ ، $\frac{'3}{٢}$ ⇐ أ = $\frac{'}{8}$ ، $\frac{'5}{8}$

∴ عدد الحلول = ٥ حلول ⇐ الإجابة الصحيحة هي : هـ

109

عدد قيم K الصحيحة الموجبة التي تحقق أن الأعداد الثلاثة :

$3k - 4$ ، $4k - 5$ ، $5k - 3$ تمثل أعداد أولية تساوي :

أ- 1	ب- ٢	جـ- 3	د- 4	هـ- 5

110

إذا كانت : }(s) ، R(s) دوال خطية ؛ تحقق لكل s : البيانات التالية :

}(R(s)) = R(}(s)) = s ، وكان : }(0) = 4 ، R(5) = 17 ، فإن :

}(2006) =

أ- 122	ب- 118	جـ- 110	د- 77	هـ- 1

111

إذا كانت : أ ، ب ، جـ أعداد حقيقية موجبة تحقق :

أ@ + ب@ + جـ@ + ٢أ ب جـ = ١ ، فإن أكبر قيمة للمقدار : أ ب جـ =

أ- $\frac{1}{4}$	ب- $\frac{1}{5}$	جـ- $\frac{1}{6}$	د- $\frac{1}{7}$	هـ- $\frac{1}{8}$

109

عدد قيم : K الصحيحة الموجبة التي تحقق أن الأعداد الثلاثة :

3k - 4 ، 4k - 5 ، 5k - 3 تمثل أعداد أولية تساوي :

أ- 1	ب- ٢	جـ- 3	د- 4	هـ- 5

الحل :

بجمع الأعداد الثلاثة نلاحظ : ٣ن - ٤ + ٤ن - ٥ + ٥ن - ٣ = ١٢ن - ١٢

∵ الناتج عدد زوجي ، والأعداد الثلاثة أعداد أولية ⇐ أحدها زوجي = ٢ .

∴ نساوي كل عدد بـــ ٢ ، فنجد أن :

٣ن - ٤ = ٢ ⇐ ن = ٢ تحقق المطلوب .

٤ن - ٥ = ٢ ⇐ ن = $\frac{7}{4}$ لا تحقق .

٥ن - ٣ = ٢ ⇐ ن = ١ لا تحقق القيم الثلاث .

∴ عند : ن = ٢ فقط تتحقق أن الأعداد الثلاثة أولية وهي : ٢ ، ٣ ، ٧ .

⇐ قيمة واحدة فقط تحقق المطلوب .

∴ الإجابة الصحيحة هي : أ-

110

إذا كانت : }(s) ، R(s) دوال خطية ؛ تحقق لكل : s ، البيانات التالية :

}(R(s)) = R(}(s)) = s ، وكان : }(0) = 4 ، R(5) = 17 ، فإن :

}(2006) =

أ- 122	ب- 118	ج- 110	د- 77	هـ- 1

الحل :

نفرض أن : د { س } = م س + ب

∵ د { ٠ } = ٤ ⇐ د { س } = م س + ٤

∵ }(R(s)) = R(}(s)) = s ⇐ ى { س } معكوس د { س }

Ü $R(s) = \frac{1}{أ} s - \frac{4}{أ}$

∵ ى { ٥ } = ١٧ Ü $\frac{5}{أ} - \frac{4}{أ} = 17$ Ü $\frac{1}{أ} = 17$ Ü $أ = \frac{1}{17}$

Ü $}(s) = \frac{1}{17} s + 4$ Ü }(2006) = 122

∴ الإجابة الصحيحة هي : أ-

111

إذا كانت : ٢ ، ب ، جـ أعداد حقيقية موجبة تحقق :

$٢^2 + ب^2 + جـ^2 + ٢ ٢ ب جـ = ١$ ، فإن أكبر قيمة للمقدار : ٢ ب جـ =

٢) $\frac{1}{4}$	ب) $\frac{1}{5}$	جـ) $\frac{1}{6}$	د) $\frac{1}{7}$	هـ) $\frac{1}{8}$

الحل :

من متباينة الوسطين الحسابي والهندسي نجد أن :

$$\frac{أ^2 + ب^2 + حـ^2 + ٢أبحـ}{4} \ge \sqrt[4]{أ^2 \times ب^2 \times حـ^2 \times ٢أبحـ}$$

$$\therefore \left(\frac{أ^2 + ب^2 + حـ^2 + ٢أبحـ}{4}\right)^4 \ge ٢ أ^3 \times ب^3 \times حـ^3$$

$$\therefore \frac{1}{256} \ge ٢ أ^3 \times ب^3 \times حـ^3 \quad \therefore أ^3 \times ب^3 \times حـ^3 \le \frac{1}{512}$$

$$\therefore أبحـ \le \frac{1}{8}$$

∴ أكبر قيمة للمقدار : ٢ ب جـ = $\frac{١}{٨}$

⇐ الإجابة الصحيحة هي : هـ

112

إذا كانت : أ ، ب ، جـ أعداد حقيقية موجبة تحقق: $أ^٢ + ب^٢ + جـ^٢ = ١$ ،

فإن أقل قيمة للمقدار : $\frac{أ^٢ب^٢}{جـ^٢} + \frac{ب^٢جـ^٢}{أ^٢} + \frac{أ^٢جـ^٢}{ب^٢} =$

أ) $\frac{1}{4}$	ب) $\frac{1}{٢}$	جـ) 1	د) ٢	هـ) 4

113

إذا كانت : $٢^{٢جـ - 1} - 3^{جـ + \frac{1}{٢}} = 3^{جـ - \frac{1}{٢}} - 4^{جـ}$ ، فإن :

$جـ + \frac{1}{جـ} =$

أ) $\frac{11}{6}$	ب) $\frac{13}{6}$	جـ) $\frac{17}{6}$	د) $\frac{19}{6}$	هـ) $\frac{23}{6}$

114

باقي قسمة : $10^{10} + 10^{10^٢} + 10^{10^3} + \cdots\cdots + 10^{10^{10}}$ على : 7 يساوي :

أ) 1	ب) ٢	جـ) 3	د) 4	هـ) 5

112

إذا كانت : أ ، ب ، ج أعداد حقيقية موجبة تحقق: $أ^2 + ب^2 + ج^2 = ١$ ،

فإن أقل قيمة للمقدار : $\frac{أ^2 ب^2}{ج^2} + \frac{ب^2 ج^2}{أ^2} + \frac{أ^2 ج^2}{ب^2} =$

أ) $\frac{1}{4}$	ب) $\frac{1}{2}$	ج) 1	د) ٢	هـ) 4

الحل :

من متباينة الوسطين الحسابي والهندسي نعلم أن :

$$\frac{س + ص}{2} \geq \sqrt{س \times ص} \Leftarrow \frac{س^2 + ص^2 + 2سص}{4} \geq س \times ص$$

$$\Leftarrow س^2 + ص^2 + 2سص \geq 4س \times ص$$

$$\Leftarrow س^2 + ص^2 \geq 2سص$$

الآن :

عند التعويض : $س = \frac{أب}{ج}$ ، $ص = \frac{بج}{أ}$ نجد أن :

$\frac{أ^2 ب^2}{ج^2} + \frac{ب^2 ج^2}{أ^2} \geq 2ب^2$ ......(1) ، بالمثل سنجد أن :

$\frac{أ^2 ج^2}{ب^2} + \frac{ب^2 ج^2}{أ^2} \geq 2ج^2$ ......(٢)

$\frac{أ^2 ج^2}{ب^2} + \frac{أ^2 ب^2}{ج^2} \geq 2أ^2$ ......(3) ، بجمع : { ١ } + { ٢ } + { ٣ } ، نجد أن :

$$2\left(\frac{أ^2 ب^2}{ج^2} + \frac{ب^2 ج^2}{أ^2} + \frac{أ^2 ج^2}{ب^2}\right) \geq 2(أ^2 + ب^2 + ج^2)$$

$$\Leftarrow \frac{أ^2 ب^2}{ج^2} + \frac{ب^2 ج^2}{أ^2} + \frac{أ^2 ج^2}{ب^2} \geq 1$$

∴ أقل قيمة للمقدار = ١ ⟸ الإجابة الصحيحة هي : ج

113

إذا كانت : $٢^{٢س - 1} - 3^{س + \frac{1}{٢}} = 3^{س - \frac{1}{٢}} - 4^{س}$ ، فإن :

$س + \frac{1}{س} =$

أ) $\frac{11}{6}$	ب) $\frac{13}{6}$	جـ) $\frac{17}{6}$	د) $\frac{19}{6}$	هـ) $\frac{23}{6}$

الحل :

$٢^{٢س - 1} - 3^{س + \frac{1}{٢}} = 3^{س - \frac{1}{٢}} - 4^{س}$

$⟸ ٢^{٢س - 1} + ٢^{٢س} = 3^{س - \frac{1}{٢}} + 3^{س + \frac{1}{٢}}$

$⟸ ٢^{٢س - 1}(٢ + 1) = 3^{س - \frac{1}{٢}}(3 + 1)$

$⟸ ٢^{٢س - 1} \times 3 = 3^{س - \frac{1}{٢}} \times 4$

$⟸ ٢^{٢س - 3} = 3^{س - \frac{3}{٢}}$

$⟸ ٢س - 3 = س - \frac{3}{٢} = 0$

$⟸ \boxed{س = \frac{3}{٢}}$

الآن :

$س + \frac{1}{س} = \frac{3}{٢} + \frac{1}{\frac{3}{٢}} = \frac{13}{6}$ ⟸ الإجابة الصحيحة هي : ب

114

باقي قسمة : $10^{10} + 10^{10^2} + 10^{10^3} + \cdots\cdots + 10^{10^{10}}$ **على : 7 يساوي :**

أ- 1	ب- ٢	جـ- 3	د- 4	هـ- 5

الحل :

الآن : باستخدام التطابقات :

١٠ ≡ ٣ { مود ٧ } ⇐ ١٠@ ≡ ٢ { مود ٧ } ⇐ { ١٠@ }% ≡ ٤ { مود ٧ }

⇐ ١٠(! ≡ ٤ { مود ٧ } .... { ١ }

فائدة : من نظرية فيرما الصغرى نعلم أن : ٤& ≡ ٤ { مود ٧ }

الآن :

∵ ١٠(! ≡ ٤ { مود ٧ } ⇐ { ١٠(! }(! ≡ ٤(! { مود ٧ }

⇐ ١٠(! ≡ ٤& × ٤# { مود ٧ }

⇐ ١٠(! ≡ ٤ × ٤# { مود ٧ }

⇐ ١٠(! ≡ ٢٥٦ { مود ٧ }

⇐ ١٠(! ≡ ٤ { مود ٧ }

الآن : لاحظ معي دوماً : $10^{10^k} \equiv 4$ (مود 7)

∵ $10^{10} + 10^{10^2} + 10^{10^3} + \cdots\cdots + 10^{10^{10}} \equiv 4 \times 10$ (مود 7)

∴ $10^{10} + 10^{10^2} + 10^{10^3} + \cdots\cdots + 10^{10^{10}} \equiv 5$ (مود 7)

∴ الباقي = ٥ ⇐ الإجابة الصحيحة هي : هـ

115

إذا كانت : $u + w + s = 1 - u\sqrt{}٢ + ٢ - w\sqrt{}٢ + s\sqrt{}٢$

، فإن : $s^3 + w^3 + u^3 =$

أ- 8	ب- 9	جـ- 1	د- ٢	هـ- 36

116

إذا كانت : }(s) ، تقبل القسمة على : $s^2 + 1$ ، كذلك : }(s) + 1 ،

تقبل القسمة على : $s^3 + s^2 + 1$ ، فإن : }(s) =

أ-	ب-	جـ-	د-	هـ-
$1 - s^2 + s^3 + s^4$	$1 - s + s^2 + s^4$	$1 - s + s^3 + s^4$	$1 + s + s^3 + s^4$	$1 + s^2 + s^3 + s^4$

117

إذا كانت : أ ، ب أعداد حقيقية موجبة بحيث : أ + f = ٢ ، فإن أصغر

قيمة للمقدار : $\frac{1}{1 + أ^{k}} + \frac{1}{1 + ب^{k}}$ ، حيث : ن عدد صحيح موجب

تساوي :

أ- 1	ب- ٢	جـ- 3	د- 4	هـ- 5

115

إذا كانت : $2\sqrt{\text{س}} + 2\sqrt{\text{ص} - 2} + 2\sqrt{\text{ع} - 1} = \text{س} + \text{ص} + \text{ع}$

، فإن : $\text{س}^3 + \text{ص}^3 + \text{ع}^3 =$

أ- 8	ب- 9	جـ- 1	د- ٢	هـ- 36

الحل :

نفرض : $\text{س} = \text{أ}^2$ ، $\text{ص} - ٢ = \text{ب}^2$ ، $\text{ع} - ١ = \text{ج}^2$

⇐ $٢\sqrt{\text{أ}^2} + ٢\sqrt{\text{ب}^2} + ٢\sqrt{\text{ج}^2} = \text{أ}^2 + \text{ب}^2 + ٢ + \text{ج}^2 + ١$

⇐ $٢\text{أ} + ٢\text{ب} + ٢\text{ج} = \text{أ}^2 + \text{ب}^2 + \text{ج}^2 + ٣$

⇐ $\text{أ}^2 - ٢\text{أ} + ١ + \text{ب}^2 - ٢\text{ب} + ١ + \text{ج}^2 - ٢\text{ج} + ١ = ٠$

⇐ $(\text{أ} - ١)^2 + (\text{ب} - ١)^2 + (\text{ج} - ١)^2 = ٠$

∴ حاصل جمع ثلاثة مربعات = ٠ ، وهذا لا يحدث إلا إذا كانت المربعات جميعها = ٠

⇐ $(\text{أ} - ١)^2 = ٠$ ⇐ $\text{أ} - ١ = ٠$ ⇐ **أ = ١** ، بالمثل : **ب = ١** ، **جـ = ١**

∴ س = ١ ، ص = ٣ ، ع = ٢

⇐ $\text{س}^3 + \text{ص}^3 + \text{ع}^3 = ١ + ٣^3 + ٢^3 = ١ + ٢٧ + ٨ = ٣٦$

⇐ الإجابة الصحيحة هي : هـ

116

إذا كانت : $د(س)$ تقبل القسمة على : $س^2 + 1$ ، كذلك : $د(س) + 1$ ، تقبل القسمة على : $س^3 + س^2 + 1$ ، فإن : $د(س) =$

أ	ب	جـ	د	هـ
$س^4 + س^3 + س^2 - 1$	$س^4 + س^2 + س - 1$	$س^4 + س^3 + س - 1$	$س^4 + س^3 + س + 1$	$س^4 + س^3 + س^2 + 1$

الحل :

نفرض : $د(س) = (س^2 + 1) \times هـ(س)$ ....(1)

$د(س) + 1 = (س^3 + س^2 + 1) \times ك(س)$

$\Leftarrow د(س) = (س^3 + س^2 + 1) \times ك(س) - 1$ ....(2)

الآن :

بمساواة : (1) ، (2) نجد أن :

$(س^3 + س^2 + 1) \times ك(س) - 1 = (س^2 + 1) \times هـ(س)$

$\Leftarrow (س^3 + س^2 + 1) \times ك(س) - (س^2 + 1) \times هـ(س) = 1$ ....(3)

لاحظ :

بإجراء القسمة المطولة سنجد أن :

$س^3 + س^2 + 1 = (س^2 + 1)(س + 1) - س$

$\Leftarrow - س = (س^3 + س^2 + 1) - (س^2 + 1)(س + 1)$

$\therefore$ الدالتان : $(س^3 + س^2 + 1)$ ، $(س^2 + 1)$ أولية نسبياً .

<u>الآن :</u>

يمكن استخدام خوارزمية القسمة ، فنجد أن :

١ = $س^2$ + ١ + س × س - س

= $س^2$ + ١ + س × [{$س^3$ + $س^2$ + ١} - {$س^2$ + ١}{س + ١}]

= $س^2$ + ١ + س{$س^3$ + $س^2$ + ١} - س{$س^2$ + ١}{س + ١}

= {$س^2$ + ١}{ ١ - س{س + ١}} + س{$س^3$ + $س^2$ + ١}

= {$س^2$ + ١}{ ١ - $س^2$ - س} + س{$س^3$ + $س^2$ + ١}

= س{$س^3$ + $س^2$ + ١} - {$س^2$ + ١}{$س^2$ + س - ١} .... {٤}

∴ بمقارنة : {٣} ، {٤} نجد أن :

م{س} = س ، هـ{س} = {$س^2$ + س - ١}

∴ د{س} = {$س^2$ + ١} × هـ{س}

= {$س^2$ + ١} × {$س^2$ + س - ١}

= $س^4$ + $س^3$ - $س^2$ + $س^2$ + س - ١

= $س^4$ + $س^3$ + س - ١

⇐ الإجابة الصحيحة هي : جـ

117

إذا كانت : أ ، ب أعداد حقيقة موجبة بحيث : $أ + ب = ٢$ ، فإن أصغر قيمة للمقدار : $\frac{1}{1+أ^{ن}} + \frac{1}{1+ب^{ن}}$ ، حيث : ن عدد صحيح موجب تساوي :

أ- 1	ب- ٢	جـ- 3	د- 4	هـ- 5

الحل :

من متباينة الوسطين الحسابي والهندسي نجد أن :

$$\frac{أ + ب}{٢} \geq \sqrt{أب} \Leftarrow \left(\frac{أ + ب}{٢}\right)^{٢} \geq أب$$

$$\Leftarrow 1 \geq أب$$

$$\Leftarrow (أب)^{ن} \leq 1$$

∴ $\{أب\}^{ن}$ إما عدد صحيح = ١ ، أو عدد كسري موجب أقل من الواحد .

الآن :

$$\frac{1}{1+أ^{ن}} + \frac{1}{1+ب^{ن}} = \frac{أ^{ن} + ب^{ن} + ٢}{(أب)^{ن} + أ^{ن} + ب^{ن} + 1} \geq 1$$

لاحظ :

إذا كان : $\{أب\}^{ن} = ١$ في هذه الحالة البسط = المقام ، والناتج = ١

وإذا كان : $\{أب\}^{ن} \leqslant ١$ ، فالبسط > المقام ، وفي هذه الحالة المقدار > ١

∴ أصغر قيمة للمقدار = ١ ⇐ الإجابة الصحيحة هي : أ-

118

إذا كان مجموع مربعي العددين المركبين S و W هو 7 و مجموع مكعبيهما هو 10 ، فإن أكبر قيمة حقيقية ممكنة لمجموعهما : S + W تساوي :

أ- 5 -	ب- 1	جـ- 3	د- 4	هـ- 7

119

إذا كان : أ ، ب ، جـ أعداد حقيقية موجبة تحقق : أ + ب + جـ = 1 ، فإن أكبر قيمة للمقدار :

$أ \sqrt[3]{1 + ب - جـ} + ب \sqrt[3]{1 + جـ - أ} + جـ \sqrt[3]{1 + أ - ب}$ تساوي :

أ- 1	ب- ٢	جـ- 3	د- 4	هـ- 5

120

لتكن : أَ ، بَ ، جَ أطوال أضلاع مثلث : أ ، ب ، جـ الزوايا المقابلة لها على الترتيب ، إذا كان : $(أَ)^2 + (بَ)^2 = ٢٠٠٩ (جَ)^2$

، فإن : $\frac{ظتا جـ}{ظتا أ + ظتا ب} =$

أ- 2006	ب- 1002	جـ- 1004	د- 1430	هـ- 120

118

إذا كان مجموع مربعي العددين المركبين S و W هو 7 و مجموع مكعبيهما هو 10 ، فإن أكبر قيمة حقيقية ممكنة لمجموعهما : S + W تساوي :

أ) -5	ب) 1	جـ) 3	د) 4	هـ) 7

الحل :

نفرض : س + ص = أ

الآن :

{ س + ص }² = س² + ص² + ٢ س ص ⇐ أ² = ٧ + ٢س ص .... { ١ }

كذلك :

س³ + ص³ = { س + ص } { س² + ص² - س ص } = ١٠

⇐ أ × { ٧ - س ص } = ١٠ ⇐ ٧ - س ص = $\frac{10}{أ}$

⇐ س ص = 7 - $\frac{10}{أ}$ .... { ٢ }

بالتعويض من { ٢ } في { ١ } نجد أن :

أ² = ٧ + 14 - $\frac{20}{أ}$ ⇐ أ² = 21 - $\frac{20}{أ}$ ⇐ أ² = $\frac{21أ - 20}{أ}$

⇐ أ³ - ٢١أ + ٢٠ = ٠

بالتجربة سنجد أن : ١ جذر للمعادلة .

بالقسمة وحل المعادلة سنجد أن مجموعة الجذور هي : { -٥ ، ١ ، ٤ }

∴ س + ص = أ ⇐ أكبر قيمة لــ أ = ٤

⇐ الإجابة الصحيحة هي : د

119

إذا كان : أ ، ب ، ج ، أعداد حقيقية موجبة تحقق : $أ + ب + ج = 1$

، فإن أكبر قيمة للمقدار :

$$أ \times \sqrt[3]{1 + ب - ج} + ب \times \sqrt[3]{1 + ج - أ} + ج \times \sqrt[3]{1 + أ - ب}$$ **تساوي :**

أ- 1	ب- ٢	جـ- 3	د- 4	هـ- 5

الحل :

لاحظ أن :

$$\sqrt[3]{1 \times 1 \times (1 + ب - ج)} \le \frac{1 + 1 + (1 + ب - ج)}{3} \le \frac{3 + ب - ج}{3}$$

$$\therefore أ \times \sqrt[3]{1 \times 1 \times (1 + ب - ج)} \le أ \times \left(\frac{3 + ب - ج}{3}\right) \cdots\cdots\cdots (1)$$

بالمثل :

سنجد أن :

$$\therefore ب \times \sqrt[3]{1 \times 1 \times (1 + ج - أ)} \le ب \times \left(\frac{3 + ج - أ}{3}\right) \cdots\cdots\cdots (2)$$

$$\therefore ج \times \sqrt[3]{1 \times 1 \times (1 + أ - ب)} \le ج \times \left(\frac{3 + أ - ب}{3}\right) \cdots\cdots\cdots (3)$$

الآن :

بجمع : { ١ } + { ٢ } + { ٣ } نجد أن الطرف الأيسر =

$$\text{أ} \times \left(\frac{3 + f - \text{حـ}}{3}\right) + \text{ب} \times \left(\frac{3 + \text{حـ} - \text{أ}}{3}\right) + \text{حـ} \times \left(\frac{3 + \text{أ} - \text{ب}}{3}\right)$$

$$= \frac{3\text{أ} + \text{أ}f - \text{أحـ} + 3\text{ب} + \text{بحـ} - \text{أب} + 3\text{حـ} + \text{أحـ} - \text{حـب}}{3}$$

$$= \frac{3\text{أ} + 3\text{ب} + 3\text{حـ}}{3} = \frac{3(\text{أ} + \text{ب} + \text{حـ})}{3} = \text{أ} + \text{ب} + \text{حـ} = 1$$

الآن :

بجمع : { ١ } + { ٢ } + { ٣ } نجد أن :

$$\text{أ} \times \sqrt[3]{1 + f - \text{حـ}} + \text{ب} \times \sqrt[3]{1 + \text{حـ} - \text{أ}} + \text{حـ} \times \sqrt[3]{1 + \text{أ} - \text{ب}} \leq 1$$

∴ أكبر قيمة للمقدار = ١ ⟸ الإجابة الصحيحة هي : ~P

120

لتكن : أَ ، بَ ، جَ أطوال أضلاع مثلث : أ ، ب ، ج ، الزوايا المقابلة لها

على الترتيب ، إذا كان : {أَ}@ + {بَ}@ = ٢٠٠٩{جَ}@

، فإن : $\frac{\text{ظتاحـ}}{\text{ظتاأ + ظتاب}}$ =

أ- 2006	ب- 1002	جـ- 1004	د- 1430	هـ- 120

الحل :

من متطابقة مجموع زاويتين نجد أن :

$$\text{ظتاأ + ظتاب} = \frac{\text{جتاأ}}{\text{جاأ}} + \frac{\text{جتاب}}{\text{جاب}} = \frac{\text{جتاأ جاب + جاأ جتاب}}{\text{جاب جاأ}} = \frac{\text{جا(أ + ب)}}{\text{جاب جاأ}}$$

الآن :

نعلم أن : أ + ب + ج = ١٨٠ ْ ⇐ أ + ب = ١٨٠ ْ - ج

$$١ \quad \frac{\text{جا(أ + ب)}}{\text{جاب جاأ}} = \frac{\text{جا(180 + حـ)}}{\text{جاب جاأ}} = \frac{\text{جاحـ}}{\text{جاب جاأ}}$$

الآن :

المقدار المطلوب على الصورة :

$$\frac{\text{ظتاحـ}}{\text{ظتاأ + ظتاب}} = \frac{\frac{\text{جتاحـ}}{\text{جاحـ}}}{\frac{\text{جاحـ}}{\text{جاب جاأ}}} = \frac{\text{جاب جاأ جتاحـ}}{\text{جا}^2\text{حـ}}$$

الآن :

نحاول أن نجعل المقدار بدلالة أحد الزوايا ، وذلك بالاستفادة من قانوني الجيب وجيب التمام كالتالي :

من قانون الجيب نجد أن :

$$\frac{\bar{أ}}{\text{جاأ}} = \frac{\bar{حـ}}{\text{جاحـ}} \Leftarrow \boxed{\text{جاأ} = \frac{\bar{أ}}{\bar{حـ}}\,\text{جاحـ}}$$

بالمثل : سنجد أن :

$$\frac{\bar{ب}}{\text{جاب}} = \frac{\bar{حـ}}{\text{جاحـ}} \Leftarrow \boxed{\text{جاب} = \frac{\bar{ب}}{\bar{حـ}}\,\text{جاحـ}}$$

∴ سوف يصبح المقدار في الأعلى على الصورة :

$$\frac{\text{ظتاحـ}}{\text{ظتاأ} + \text{ظتاب}} = \frac{\text{جاب جاأ جتاحـ}}{\text{جا}^2\text{حـ}} = \frac{\left(\frac{\bar{ب}}{\bar{حـ}}\,\text{جاحـ}\right)\left(\frac{\bar{أ}}{\bar{حـ}}\,\text{جاحـ}\right)\text{جتاحـ}}{\text{جا}^2\text{حـ}} = \frac{\bar{أ}\ \bar{ب}}{(\bar{حـ})^2}\,\text{جتاحـ}$$

الآن :

من قانون جيب التمام نعلم أن :

$$\text{جتاحـ} = \frac{(\bar{أ})^2 + (\bar{ب})^2 - (\bar{حـ})^2}{2\,\bar{أ}\,\bar{ب}} = \frac{2009(\bar{حـ})^2 - (\bar{حـ})^2}{2\,\bar{أ}\,\bar{ب}}$$

$$= \frac{2008(\bar{حـ})^2}{2\,\bar{أ}\,\bar{ب}} = \frac{1004(\bar{حـ})^2}{\bar{أ}\,\bar{ب}}$$

الآن : بالتعويض بقيمة : جتاحـ في المقدار في الأعلى نجد أن :

$$\boxed{\frac{\text{ظتاحـ}}{\text{ظتاأ} + \text{ظتاب}} = \frac{\bar{أ}\ \bar{ب}}{(\bar{حـ})^2} \cdot \frac{1004(\bar{حـ})^2}{\bar{أ}\ \bar{ب}} = 1004}$$

⇐ الإجابة الصحيحة هي : جـ

121

إذا كان حـ هي مجموع المعاملات الحقيقية لـ $(1 + j\,s)^{2009}$ ، حيث : $j = \sqrt{-1}$ ، فإن : لو$_{٢}$ حـ =

أ- 251	ب- 502	جـ- 1004	د- 2008	هـ- 2009

122

إذا كان : ن عدد صحيح موجب يحقق أن : $k^3 + ٢k^٢ + 9k + 8$ مكعب لعدد صحيح ، فإن : ن =

أ- 1	ب- ٢	جـ- 3	د- 5	هـ- 7

123

عند تحليل المقدار : ١ + ٲ + ب + جـ + ٲب + ٲجـ + ب جـ + ٲ ب جـ ، فإن أحد عوامله هو :

أ- أ + ب	ب- 1 + أ + ب	جـ- 1 + حـ	د- ٢ + أ	هـ- أ + f + حـ

121

إذا كان ج هي مجموع المعاملات الحقيقية لـ $(1 + j s)^{2009}$ ، حيث : $j = \sqrt{-1}$ ، فإن : $\log_{2} ج =$

أ- 251	ب- 502	جـ- 1004	د- 2008	هـ- 2009

الحل :

فائدة : حاصل جمع المعاملات في كثيرة الحدود يتحقق عند : س = ١ .

∴ عند : س = ١ يصبح المقدار على الصورة : $(1 + ت)^{2009}$

الآن : بالاستفادة من نظرية ديموافر ؛ نفرض أن المقدار = ك

$$ك = (1 + j)^{2009} = \left[(\sqrt{2})\left(جتا(45°) + j\,جا(45°)\right)\right]^{2009}$$

$$= (\sqrt{2})^{2009}\left(جتا(45°) + j\,جا(45°)\right)$$

$$= (\sqrt{2})^{2009}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= (\sqrt{2})^{2009} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + j)$$

$$= \frac{(\sqrt{2})^{2010}}{2}(1 + j)$$

$$= \frac{\left((\sqrt{2})^{2}\right)^{1005}}{2}(1 + j)$$

$$= \frac{(2)^{1005}}{2}(1 + j) = 2^{1004}(1 + j)$$

∵ ج حاصل جمع المعاملات الحقيقية ⟸ $ج = 2^{1004}$

∴ $\log_{2} ج = 1004$ ⟸ الإجابة الصحيحة هي : جـ

122

إذا كان : ن عدد صحيح موجب يحقق أن : $k^3 + 2k^2 + 9k + 8$ مكعب لعدد صحيح ، فإن : ن =

أ- 1	ب- 2	جـ- 3	د- 5	هـ- 7

الحل :

∵ ن عدد صحيح موجب نلاحظ أن :

$\Leftarrow$ $ن^3 < ن^3 + 2ن^2 + 9ن + 8 < (ن + 2)^3$

الآن :

لن تبقَ سوى حالة واحدة فقط وهي أن : $ن^3 + 2ن^2 + 9ن + 8 = (ن + 1)^3$

الآن :

نبحث عن قيم ن التي تحقق أن : $ن^3 + 2ن^2 + 9ن + 8 = ن^3 + 3ن^2 + 3ن + 1$

$\Leftarrow$ $ن^2 - 6ن - 7 = 0$ $\Leftarrow$ $(ن - 7)(ن + 1) = 0$

$\Leftarrow$ $ن = 7$

$\Leftarrow$ الإجابة الصحيحة هي : هـ

123

عند تحليل المقدار : ١ + ﻡ + ب + ﺟ + ﻡب + ﻡﺟ + ب ﺟ + ﻡب ﺟ ، فإن أحد عوامله هو :

ﻡ- ﺃ + ب	ب- 1 + ﺃ + ب	ﺟ- 1 + ﺟ	د- ٢ + ﺃ	ﻫ- ﺃ + f + ﺟ

الحل :

نفرض أن المقدار ك

⇐ ك = ١ + ﻡ + ب + ﺟ + ﻡب + ﻡﺟ + ب ﺟ + ﻡ ب ﺟ

= { ١ + ﻡ } + ب { ١ + ﻡ } + ﺟ { ١ + ﻡ } + ب ﺟ { ١ + ﻡ }

= { ١ + ﻡ }{ ١ + ب + ﺟ + ب ﺟ }

= { ١ + ﻡ }{ ١ + ب + ﺟ{ ١ + ب }}

= { ١ + ﻡ }{ ١ + ب }{ ١ + ﺟ }

⇐ الإجابة الصحيحة هي : ﺟ

124

عدد الأعداد المحصورة بين : ١٠٠٠ ، ٩٩٩٩ وجميع خاناتها أعداد زوجية تساوي :

أ- 4×5^{3}	ب- 3×5^{4}	ج- 4×5^{4}	د- 5^{5}	هـ- 4×4^{3}

125

إذا كانت : أ ، ب أعداد حقيقية موجبة تحقق : أ + ب = ١ ، فإن أصغر قيمة للمقدار : $\left(1+\frac{1}{\text{أ}}\right)\left(1+\frac{1}{\text{ب}}\right)$ تساوي :

أ- 1	ب- 3	ج- 5	د- 7	هـ- 9

126

في الدائرة م : ‘ أ د ‘ = ٣ ، ‘ د ب ‘ = ٥

، إذا كان : م جـ يقطع : أ ب في د ، ويقطع الدائرة : م في جـ ؛ حيث : ‘ جـ د ‘ = ١ ، فإن نصف قطر الدائرة : م يساوي :

أ- ٢	ب- 3	ج- 4	د- 6	هـ- 8

124

عدد الأعداد المحصورة بين : ١٠٠٠ ، ٩٩٩٩ وجميع خاناتها أعداد زوجية تساوي :

أ~ $4 ´ 5^{3}$	ب~ $3 ´ 5^{4}$	جـ~ $4 ´ 5^{4}$	د~ 5^{5}	هـ~ $4 ´ 4^{3}$

الحل :

العدد المطلوب مكون من أربع خانات على الصورة : أ ب جـ د

أ : تمثل خانة الآحاد ، د : تمثل خانة الآلاف .

الآن :

الأعداد الزوجية هي : ٠ ، ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ خمسة أعداد .

الآن :

كل الخانات السابقة يمكن التعويض عنها بأحد الأعداد الزوجية السابقة ماعدا خانة الآلاف فلايمكن التعويض عنها بالصفر .

∴ عدد الاحتمالات ستكون كالتالي : ٥ × ٥ × ٥ × ٤ = ٥# × ٤

⇐ الإجابة الصحيحة هي : أ~

125

إذا كانت : ا ، ب أعداد حقيقية موجبة تحقق : ا + ب = ١ ، فإن أصغر قيمة للمقدار : $\left(1+\frac{1}{\text{ا}}\right)\left(1+\frac{1}{\text{ب}}\right)$ تساوي :

ا- 1	ب- 3	جـ- 5	د- 7	هـ- 9

الحل :

$$\left(1+\frac{1}{\text{أ}}\right)\left(1+\frac{1}{\text{ب}}\right)=\left(\frac{\text{أ}+1}{\text{أ}}\right)\left(\frac{\text{ب}+1}{\text{ب}}\right)$$

$$=\frac{\text{أب}+\text{أ}+\text{ب}+1}{\text{أب}}=\frac{\text{أب}+٢}{\text{أب}}$$

$$=1+\frac{٢}{\text{أب}}\cdots\cdots(1)$$

الآن :

من متباينة الوسطين الحسابي والهندسي :

$$\frac{\text{أ}+\text{ب}}{٢}\ge\sqrt{\text{أب}}\Rightarrow\frac{1}{4}\ge\text{أب}\Rightarrow\frac{1}{\text{أب}}\ge 4\Rightarrow\frac{٢}{\text{أب}}\ge 8\cdots\cdots(٢)$$

الآن :

بالتعويض من {١} في {٢} نجد أن : $\left(1+\frac{1}{\text{أ}}\right)\left(1+\frac{1}{\text{ب}}\right)=1+\frac{٢}{\text{أب}}\ge 9$

⟸ **الإجابة الصحيحة هي : هـ**

126

في الدائرة : م ، ' أ د ' = ٣ ، ' د ب ' = ٥

، إذا كان : م ج يقطع : أ ب في د ، ويقطع الدائرة :

م في ج ؛ حيث : ' ج د ' = ١ ، فإن نصف قطر الدائرة : م يساوي :

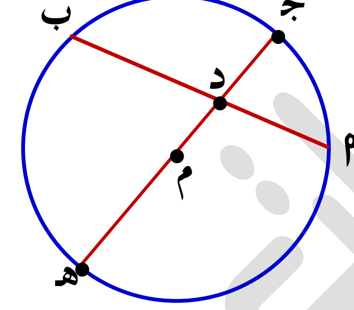
أ- ٢	ب- 3	ج- 4	د- 6	هـ- 8

الحل :

نظرية : نظرية تقاطع الأوتار في دائرة :

{ إذا تقاطع وتران في دائرة ، فإن حاصل ضرب طولي قطعتي أحدهما تساوي حاصل ضرب طولي قطعتي الآخر . }





بمد نصف القطر م ج كقطر للدائرة كما في الشكل :

فالنفرض أن : ' م هـ ' = س ⇐ ' م د ' = س - ١

⇐ ' هـ د ' = ٢س - ١

الآن :

من النظرية في الأعلى نجد أن :

{ ٢س - ١ } × ١ = ٣ × ٥ ⇐ ٢س - ١ = ١٥ ⇐ ٢س = ١٦ ⇐ س = ٨ .

∴ نصف قطر الدائرة = ٨ وحدات .

⇐ الإجابة الصحيحة هي : هـ

127

إذا كانت : س ص + س + ص = ٧١ ، س ص@ + ص س@ = ٨٨٠ ،

حيث : س ، ص أعداد صحيحة موجبة ، فإن : س@ + ص@ =

أ- 146	ب- 55	جـ- 16	د- 256	هـ- 128

128

إذا كانت جذور المعادلة : س# + ٣س@ + ٤س - ١١ = ٠ هي : أ ، ب ، جـ ،

وإذا وجدت دالة تكعيبية أخرى على الصورة : س# + م س@ + هـ س + ن = ٠ ،

جذورها : أ + ب ، ب + جـ ، أ + جـ ، فإن : ن =

أ- 13	ب- 23	جـ- 33	د- 43	هـ- 53

129

في المثلث : Δ أبجـ : $\widehat{أ}$ = 60° ، $\widehat{ب}$ = 45° ، إذا كان منصف الزاوية : $\widehat{أ}$

يقطع الضلع : بجـ في النقطة : ا ، حيث : |أ ا| = 24 ، إذا كانت مساحة

المثلث : Δ أبجـ على الصورة : k + i √t حيث : t عدد أولي ، فإن :

k + i + t =

أ- 35	ب- 330	جـ- 47	د- 291	هـ- 84

127

إذا كانت : س ص + س + ص = ٧١ ، س ص@ + ص س@ = ٨٨٠ ،

حيث : س ، ص **أعداد صحيحة موجبة ، فإن :** س@ + ص@ =

٩- 146	ب- 55	جـ- 16	د- 256	هـ- 128

الحل :

من المعادلة الأولى نجد أن : س + ص = ٧١ - س ص ....{ ١ }

من المعادلة الثانية نجد أن : س ص { س + ص } = ٨٨٠ ......{ ٢ }

الآن :

بالتعويض من المعادلة الأولى في الثانية نجد أن : ٧١ س ص - س@ص@ = ٨٨٠

للتبسيط نفرض أن : س ص = ٩ ، س + ص = ب

⇐ تصبح المعادلة على الصورة : ٧١٩ - ٩@ = ٨٨٠ ⇐ ٩@ - ٧١٩ + ٨٨٠ = ٠

⇐ { ٩ - ١٦ }{ ٩ - ٥٥ } = ٠ ⇐ ٩ = ١٦ ، ٩ = ٥٥

الآن :

إما : س + ص = ٥٥ ، س ص = ١٦ وهذا النظام لا يحقق لأن القيم المطلوبة صحيحة موجبة .

أو : س + ص = ١٦ ، س ص = ٥٥ ، وبحل هذا النظام نجد أن :

س = ٥ ، ص = ١١ أو العكس ⇐ س@ + ص@ = ١٤٦

⇐ الإجابة الصحيحة هي : ٩-

128

إذا كانت جذور المعادلة : $س^{٣} + ٣س^{٢} + ٤س - ١١ = ٠$ هي : ﻡ ، ب ، ج ،

وإذا وجدت دالة تكعيبية أخرى على الصورة : $س^{٣} + م س^{٢} + هـ س + ن = ٠$

؛ جذورها : ﻡ + ب ، ب + ج ، ﻡ + ج ، فإن : ن =

ﻡ- 13	ب- 23	ج- 33	د- 43	هـ- 53

الحل :

من علاقة فيتا و المعادلة الأولى ؛ نجد أن :

ﻡ + ب + ج = - ٣ .... { ١ }

ﻡب + ﻡ ج + ب ج = ٤ .... { ٢ } ، ﻡ ب ج = ١١ .... { ٣ }

الآن :

من المعادلة الثانية نجد أن :

ﻡ + ب + ب + ج + ﻡ + ج = - م ⇐ ٢{ ﻡ + ب + ج } = - م

⇐ من { ١ } نجد أن : ٢ × - ٣ = - م ⇐ م = ٦ .

كذلك :

{ ﻡ + ب }{ ﻡ + ج } + { ب + ج }{ ﻡ + ب } + {ب + ج }{ ﻡ + ج } = هـ

⇐ $ﻡ^{٢}$ + ﻡ ج + ﻡ ب + ب ج + ﻡ ب + ﻡ ج + $ب^{٢}$ + ب ج + ﻡ ب + ب ج + ﻡ ج + $ج^{٢}$ = هـ

⇐ $ﻡ^{٢}$ + $ب^{٢}$ + $ج^{٢}$ + ٣ { ﻡ ب + ﻡ ج + ب ج } = هـ

⇐ $ﻡ^{٢}$ + $ب^{٢}$ + $ج^{٢}$ + ١٢ = هـ

⇐ $\{ ﻡ + ب + ج \}^{٢}$ - ٢{ ﻡ ب + ﻡ ج + ب ج } + ١٢ = هـ

⇐ $\{ - ٣ \}^{٢}$ - ٢ × ٤ + ١٢ = هـ ⇐ ٩ - ٨ + ١٢ = هـ

⇐ هـ = ١٣

أيضاً :

{أ + ب}{أ + جـ}{ب + جـ} = - ك

⇐ {أ^2 + أ جـ + أ ب + ب جـ}{ب + جـ} = - ك

⇐ أ^{2}ب + أ ب جـ + أ ب^2 + ب^{2}جـ + أ^{2}جـ + أ جـ^2 + أ ب جـ + ب جـ^2 = - ك

⇐ ٢أ ب جـ + أ ب {أ + ب} + ب جـ {ب + جـ} + أ جـ {أ + جـ} = - ك

الآن :

بالاستفادة من المعادلة الأولى و الثالثة نجد أن

⇐ ٢٢ - أ ب {جـ + ٣} - ب جـ {أ + ٣} - أ جـ {ب + ٣} = - ك

⇐ ٢٢ - ٣أ ب جـ - ٣ {أ ب + أ جـ + ب جـ} = - ك

⇐ ٢٢ - ٣ × ١١ - ٣ × ٤ = - ك

⇐ - ٢٣ = - ك ⇐ ك = ٢٣

∴ المعادلة المطلوبة على الصورة :

س^3 + ٦س^2 - ١٣س + ٢٣ = ٠

⇐ الإجابة الصحيحة هي : ب

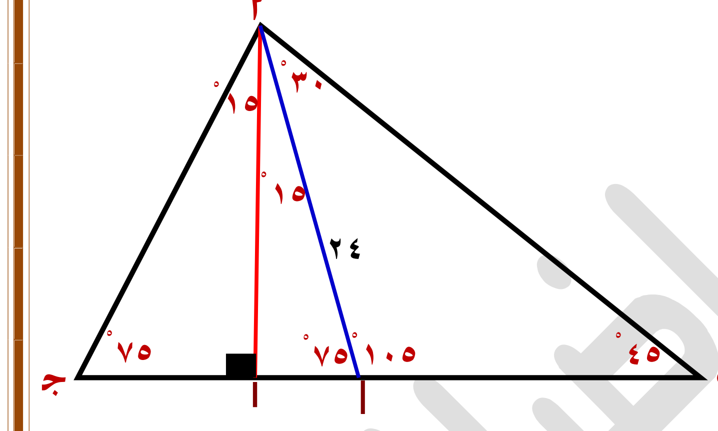
129

في المثلث : Δ أبحـ : $\hat{أ}$ = 60° ، $\hat{ب}$ = 45° ، إذا كان منصف الزاوية $\hat{أ}$: يقطع الضلع : بحـ في النقطة : ا ، حيث : |أ]| = 24 ، إذا كانت مساحة المثلث : Δ أبحـ على الصورة : k + i √t حيث : t عدد أولي ، فإن :

k + i + t =

أ- 35	ب- 330	جـ- 47	د- 291	هـ- 84

الحل :



نرسم : أ هـ عمودي على ب ج

الآن :

يمكن كتابة الزوايا على الرسم كما هو موضح

الآن :

المثلث : أ هـ ء قائم الزاوية ؛ باستخدام العلاقات المثلثية نجد أن :

$$|أ\ i| = 24 \times جا(75) = 6(\sqrt{6} + \sqrt{2})$$

كذلك :

المثلث : أ ب هـ متطابق الضلعين بسهولة سنجد أن :

$$|ب\ i| = |أ\ i| = 6(\sqrt{6} + \sqrt{2})$$

والمثلث : أ ء ج متطابق الضلعين بسهولة سنجد أن :

$$|أ\ ]| = |أ\ حـ| = 24$$

الآن :

المثلث : ٩ هـ جـ قائم الزاوية ؛ باستخدام العلاقات المثلثية نجد أن :

$|أ\ حـ| = ٢٤ \times جتا(75) = 6(\sqrt{6} - \sqrt{٢})$

الآن :

بسهولة سنجد أن : $|ب\ حـ| = 12\sqrt{6}$

الآن :

مساحة المثلث : ٩ ب جـ $= \frac{1}{٢} \times |أ\ i| \times |ب\ حـ|$

$= \frac{1}{٢} \times 6(\sqrt{6} + \sqrt{٢}) \times 12\sqrt{6}$

$= 36 \times (6 + \sqrt{12})$

$= 36 \times (6 + ٢\sqrt{3})$

$= 216 + 72\sqrt{3}$

∴ K = 216 ، i = 72 ، T = 3

⇐ K + i + [= 291

⇐ الإجابة الصحيحة هي : د

130

ناتج المقدار :

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}(1^2+2^2)+\frac{1}{12}(1^2+2^2+3^2)+\frac{1}{20}(1^2+2^2+3^2+4^2)+\cdots+\frac{1}{3660}(1^2+2^2+\cdots+60^2)$$

أ- 420	ب- 520	جـ- 620	د- 720	هـ- 820

131

عدد قيم : س الصحيحة التي تحقق المعادلة :

$$(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{س}+(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{س}=10$$

أ- 1	ب- ٢	جـ- 3	د- 4	هـ- 5

132

في المثلث : Δ أ ب حـ : ظا(ب) = $\frac{22}{7}$ ، إذا كان الارتفاع من : أ إلى الضلع : ب حـ يقطع الضلع : ب حـ إلى قطعتين أطوالهما : ٣ ، ١٧ ، فإن مساحة المثلث : Δ أ ب حـ تساوي :

أ- 110	ب- $\frac{510}{11}$	جـ- 11	د- 510	هـ- $\frac{110}{11}$

130

ناتج المقدار :

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}(1^2+2^2)+\frac{1}{12}(1^2+2^2+3^2)+\frac{1}{20}(1^2+2^2+3^2+4^2)+\cdots+\frac{1}{3660}(1^2+2^2+\cdots+60^2)$$

أ- 420	ب- 520	جـ- 620	د- 720	هـ- 820

الحل :

يمكن إعادة كتابة المجموع كالتالي :

$$\sum_{k=1}^{60}\left(\frac{\sum_{i=1}^{k} i^2}{k(k+1)}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1^2+2^2}{2\times 3}+\cdots+\frac{1^2+2^2+\cdots+60^2}{60\times 61}$$

الآن :

نعلم أن مجموع ن مربعاً من الأعداد = $\sum_{i=1}^{k} i^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

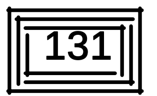
بالتعويض في الصيغة في الأعلى نجد أن :

$$\sum_{k=1}^{60}\left(\frac{\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}}{k(k+1)}\right)=\sum_{k=1}^{60}\left(\frac{k(k+1)(2k+1)}{6k(k+1)}\right)=\sum_{k=1}^{60}\left(\frac{2k+1}{6}\right)$$

الآن : المتسلسلة : $\sum_{k=1}^{60}\left(\frac{2k+1}{6}\right)$ حسابية أساسها = ٢ ، وحدها الأول = ٣ .

$$\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{60}(2k+1)=\frac{30\times[6+59\times 2]}{6}=5\times[6+59\times 2]=620$$

⇐ الإجابة الصحيحة هي : جـ



عدد قيم : س الصحيحة التي تحقق المعادلة :

$$\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{س} + \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{س} = 10$$

أ- 1	ب- ٢	جـ- 3	د- 4	هـ- 5

الحل :

نلاحظ أن :

$$\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{س} = \frac{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{س} \times \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{س}}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{س}} = \frac{1}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{س}}$$

∴ يمكن كتابة المعادلة على الصورة : $\frac{1}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{س}} + \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{س} = 10$

⇐ نفرض : $ص = \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{س}$ ⇐ تصبح المعادلة على الصورة :

$$\frac{1}{ص} + ص = 10 \Rightarrow ص^2 - 10ص + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{ص = 5 \pm 2\sqrt{6}}$$

الآن :

١) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{س} = 5 - 2\sqrt{6} \Rightarrow س = \log_{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)} \left(5 - 2\sqrt{6}\right)$

$\Rightarrow س = \log_{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)} \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{2} = 2$

١) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{س} = 5 + 2\sqrt{6} \Rightarrow س = \log_{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)} \left(5 + 2\sqrt{6}\right)$

$\Rightarrow س = \log_{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)} \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{2}$

$\Rightarrow س = \log_{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)} \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{-2} = -2$

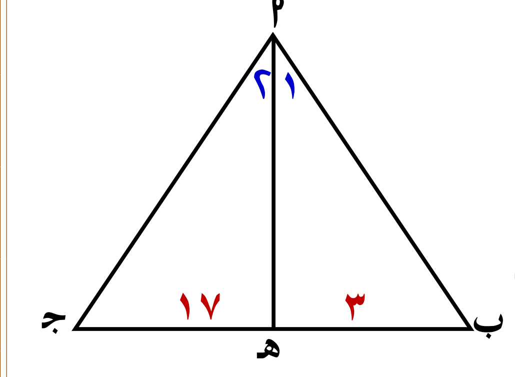
∴ عدد قيم س التي تحقق المعادلة = ٢ ⇐ الإجابة الصحيحة هي : ب

132

في المثلث : ∆ أبجـ : ظا(أ) = $\frac{22}{7}$ ، إذا كان الارتفاع من : أ إلى الضلع : بجـ يقطع الضلع : بجـ إلى قطعتين أطوالهما : ٣ ، ١٧ ، فإن مساحة المثلث : ∆ أبجـ تساوي :

هـ) $\frac{110}{11}$	د) 510	جـ) 11	ب) $\frac{510}{11}$	أ) 110

الحل :



نعلم أن :

$$ظا(1) = \frac{3}{|أهـ|} \quad ، \quad ظا(2) = \frac{17}{|أهـ|}$$

من قانون مجموع زاويتين نجد أن :

$$ظا(أ) = ظا(1 + 2) = \frac{ظا(1) + ظا(2)}{1 - ظا(1) \times ظا(2)}$$

الآن :

$$\Leftarrow \frac{22}{7} = \frac{\frac{3}{|أهـ|} + \frac{17}{|أهـ|}}{1 - \frac{51}{|أهـ|^2}} \quad \Leftarrow \frac{22}{7} = \frac{\frac{20}{|أهـ|}}{\frac{|أهـ|^2 - 51}{|أهـ|^2}}$$

$$\Leftarrow \frac{22}{7} = \frac{20|أهـ|}{|أهـ|^2 - 51} \quad \Leftarrow 22|أهـ|^2 - 1122 = 140|أهـ|$$

$$\Leftarrow 11|أهـ|^2 - 70|أهـ| - 561 = 0$$

$$\Leftarrow (11 - |أهـ|)(11|أهـ| + 51) = 0$$

∴ القيمة التي تحقق هي : ' أ هـ ' = ١١ مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ × ٢٠ × ١١ = ١١٠

⇐ الإجابة الصحيحة هي : أ)

133

قيمة ∾ التي تحقق المعادلة :

$$\frac{4^5 + 4^5 + 4^5 + 4^5}{3^5 + 3^5 + 3^5} \text{ ، } \frac{6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5}{٢^5 + ٢^5} = ٢^k$$

أ- 5	ب- 6	جـ- 10	د- 12	هـ- 24

134

إذا كانت : د { س } = س@ + ٤س + ١ **فإن عدد حلول المعادلة الحقيقية :**

((s)}} = s **تساوي :**

أ- 1	ب- ٢	جـ- 3	د- 4	هـ- 5

135

في المثلث : Δ أبحـ : | أ f | = 3 ، | أ حـ | = 7 ، | f حـ | = 5 **إذا كان :**

أ] ، حـ ا **منصفي الزاويتين يلتقيان في :** ; ، **فإن :** | أ ; | =

أ- $\sqrt{7}$	ب- $\frac{\sqrt{7}}{٢}$	جـ- $\frac{3\sqrt{7}}{٢}$	د- $\frac{\sqrt{7}}{6}$	هـ- $\frac{\sqrt{7}}{3}$

133

قيمة ن التي تحقق المعادلة :

$$\frac{4^5 + 4^5 + 4^5 + 4^5}{3^5 + 3^5 + 3^5} \times \frac{6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5}{2^5 + 2^5} = 2^{ن}$$

أ- 5	ب- 6	جـ- 10	د- 12	هـ- 24

الحل :

$$\because \quad = \frac{4^5 + 4^5 + 4^5 + 4^5}{3^5 + 3^5 + 3^5} \times \frac{6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5}{2^5 + 2^5}$$

$$= \frac{4^5 \times 4}{3^5 \times 3} \times \frac{6^5 \times 6}{2^5 \times 2}$$

$$= \frac{6^5 \times 6 \times 4^5 \times 4}{2^5 \times 2 \times 3^5 \times 3}$$

$$= \frac{6^5 \times 6 \times 4^5 \times 4}{6^5 \times 6} = 4^5 \times 4 = 2^{12}$$

$\therefore$ ن = ١٢

⇐ الإجابة الصحيحة هي : د-

134

إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^2 + 4\text{س} + 1$ فإن عدد حلول المعادلة الحقيقية :

$\text{د}(\text{د}(\text{س})) = \text{س}$ تساوي :

أ) 1	ب) ٢	جـ) 3	د) 4	هـ) 5

الحل :

$$\text{د}(\text{د}(\text{س})) = (\text{س}^2 + 4\text{س} + 1)^2 + 4(\text{س}^2 + 4\text{س} + 1) + 1$$

$$= \text{س}^4 + 16\text{س}^2 + 1 + 8\text{س}^3 + 2\text{س}^2 + 8\text{س} + 4\text{س}^2 + 16\text{س} + 4 + 1$$

$$= \text{س}^4 + 8\text{س}^3 + 22\text{س}^2 + 24\text{س} + 7$$

$$\text{س}^4 + 8\text{س}^3 + 22\text{س}^2 + 24\text{س} + 6 = \text{س} \Leftarrow \text{س}^4 + 8\text{س}^3 + 22\text{س}^2 + 23\text{س} + 6 = 0$$

بتجربة القواسم السالبة للحد المطلق نجد أن : - ٢ ، - ٣ جذور للمعادلة هذا يعني أن الدالة تقبل القسمة على : { س + ٢ }{ س + ٣ } .

إجراء القسمة المطولة سنجد أن :

$$\text{د}(\text{د}(\text{س})) = (\text{س}^2 + 5\text{س} + 6)(\text{س}^2 + 3\text{س} + 1) = 0$$

∵ مميز المعادلة الثانية موجب ⟸ يوجد جذران حقيقيان .

∴ عدد الجذور الحقيقية = أربعة جذور .

⟸ الإجابة الصحيحة هي : د

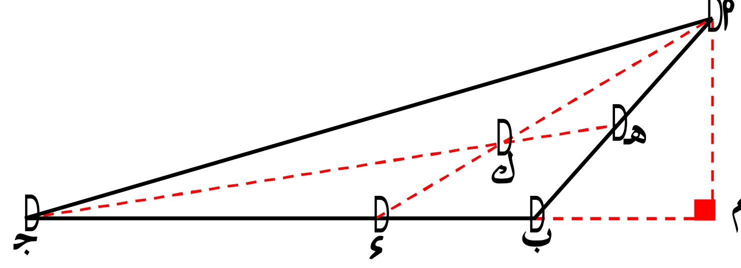
135

في المثلث : ∆ أب ح : | أ f | = 3 ، | أ ح | = 7 ، | f ح | = 5 إذا كان :

أ] ، ح ا منصفي الزاويتين يلتقيان في : ; ، فإن : | أ ; | =

أ $\sqrt{7}$	ب $\frac{\sqrt{7}}{٢}$	ج $\frac{3\sqrt{7}}{٢}$	د $\frac{\sqrt{7}}{6}$	هـ $\frac{\sqrt{7}}{3}$

الحل :



من نتائج نظرية سيتوارت سنجد أن :

$|ح]| = \frac{|ب ح| \times |أ ح|}{|ب ح| + |أ ب|} = \frac{35}{10} = \frac{7}{٢}$ Ü $|ب]| = \frac{3}{٢}$

$|أ i| = \frac{|أ ب| \times |أ ح|}{|أ ح| + |ب ح|} = \frac{21}{12} = \frac{7}{4}$ Ü $|ب i| = \frac{5}{4}$

الآن :

أ م : ارتفاع في المثلث أ ب ج ⇐ المثلثين : أ م ب ، أ م ج قائما الزاوية ∴ من نظرية فيثاغورس :

$(أ م)^2 + (م ب)^2 = ٩$ ....{ ١ }

$(أ م)^2 + (م ج)^2 = ٤٩ ⇐ (أ م)^2 + (م ب + ٥)^2 = ٤٩$

$⇐ (أ م)^2 + (م ب)^2 + ١٠ م ب + ٢٥ = ٤٩$

$⇐ (أ م)^2 + (م ب)^2 + ١٠ م ب = ٢٤$....{ ٢ }

الآن :

- ١ × { ١ } + { ٢ } : ١٠ ' م ب ' = ١٥ ⇐ ' م ب ' = #

الآن :

من نظرية فيثاغورس للمثلث : ٩ م ب ، نجد أن : $|ا ٩| = \frac{3\sqrt{3}}{٢}$

أيضاً : من نظرية فيثاغورس للمثلث : ٩ م جـ نجد أن : $|٩]| = \frac{3\sqrt{7}}{٢}$

الآن : من نظرية سيفا نجد أن :

$$\frac{|٩ ;|}{|;]|} ، \frac{|]جـ|}{|جـ ب|} ، \frac{|ب i|}{|i ٩|} = 1 \quad Ü \quad \frac{|٩ ;|}{|;]|} ، \frac{7}{٢} \cdot \frac{٢}{5} ، \frac{\frac{5}{4}}{\frac{7}{4}} = 1$$

$$Ü \quad \frac{|٩ ;|}{|;]|} ، \frac{7}{٢} \cdot \frac{٢}{5} ، \frac{5}{7} = 1$$

$$Ü \quad \frac{|٩ ;|}{|;]|} ، \frac{1}{٢} = 1 \quad Ü \quad \frac{|٩ ;|}{|;]|} = \frac{٢}{1}$$

الآن :

$$|٩]| = |٩ ;| + |;]| \quad Ü \quad \frac{3\sqrt{7}}{٢} = |٩ ;| + |;]| \quad Ü \quad \frac{\frac{3\sqrt{7}}{٢}}{|٩ ;|} = 1 + \frac{|;]|}{|٩ ;|}$$

$$Ü \quad \frac{\frac{3\sqrt{7}}{٢}}{|٩ ;|} = 1 + \frac{1}{٢} \quad Ü \quad \frac{3\sqrt{7}}{٢} = |٩ ;| + \frac{1}{٢}|٩ ;|$$

$$Ü \quad |٩ ;| = \sqrt{7}$$

⇐ الإجابة الصحيحة هي : ٩~

136

عدد الثنائيات : { س ، ص } الصحيحة التي تحقق المعادلة :

س# + ص# = س@ص + س ص@ + ١ تساوي :

أ- 1	ب- ٢	جـ- 3	د- 4	هـ- 5

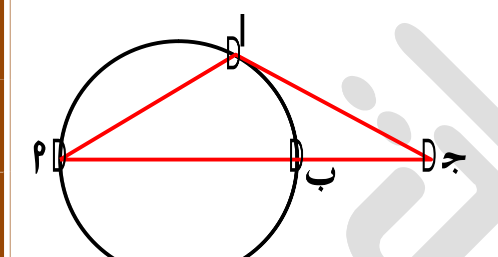
137

إذا كانت باقي قسمة كثيرة الحدود : د { س } على : { س - ٣ } هو : ٤ ،

وباقي قسمتها على : { س - ٤ } هو : ٣ ، فإن باقي قسمتها على :

س@ - ٧س + ١٢ يساوي :

أ- 7	ب- 12	جـ- 7 - s	د- 4 - s	هـ- 3 - s



138

في الشكل المرافق مد القطر : أ ب بمقدار

وحدة واحدة خارج الدائرة إلى النقطة : حـ ،

وكان الخط المستقيم : حـ ا مماساً للدائرة ، وكانت الزاوية :] حـ ب = 30°

، فإن مساحة المثلث : أ حـ ا تساوي :

أ- $\frac{3}{8}$	ب- $\frac{\sqrt{3}}{4}$	جـ- $\frac{3}{4}$	د- $\frac{3\sqrt{3}}{4}$	هـ- $\frac{3\sqrt{3}}{٢}$

136

عدد الثنائيات : { س ، ص } الصحيحة التي تحقق المعادلة :

س# + ص# = س@ص + س ص@ + ١ تساوي :

أ- 1	ب- ٢	جـ- 3	د- 4	هـ- 5

الحل :

س# + ص# = س@ص + س ص@ + ١

⇐ س# + ص# - { س@ص + س ص@ } = ١

⇐ { س + ص }{ س@ - س ص + ص@ } - س ص{ س + ص } = ١

⇐ { س + ص }{ س@ - ٢س ص + ص@ } = ١

⇐ { س + ص }{ س - ص }@ = ١

الآن :

∵ س ، ص عددان صحيحان ، والمقدار : { س - ص }@ مربع كامل :

∴ ستكون عندنا الحالة الوحيدة فقط :

{ س - ص }@ = ١ ⇐ س - ص = _ ١ ، س + ص = ١

الآن : س - ص = ١ ⇐ س = ١ + ص ⇐ ص = ٠ ، س = ١

س - ص = - ١ ⇐ س = - ١ + ص ⇐ ص = ١ ، س = ٠

⇐ الإجابة الصحيحة هي : ب

137

إذا كانت باقي قسمة كثيرة الحدود : د { س } على : { س - ٣ } هو : ٤ ، وباقي قسمتها على : { س - ٤ } هو : ٣ ، فإن باقي قسمتها على :

س@ - ٧س + ١٢ يساوي :

أ- 7	ب- 12	جـ- s - 7	د- s - 4	هـ- s - 3

الحل :

نلاحظ أن : ٣ ، ٤ جذور لــ س@ - ٧س + ١٢

الآن :

نفرض خارج قسمة : د { س } على : س@ - ٧س + ١٢ هو : ك{ س }

∴ د { س } = ك { س } × { س@ - ٧س + ١٢ } + ٢س + ب ....{ △ }

الآن :

من نظرية الباقي نتذكر المعلومات التالية :

١ باقي قسمة كثيرة حدود على كثيرة حدود من الدرجة الثانية إما دالة ثابتة أو دالة من الدرجة الأولى .

٢ باقي قسمة أي كثيرة حدود : د { س } على كثيرة حدود من الدرجة الأولى :

{ س - ج } يساوي : د { ج } .

الآن :

بالتعويض عن : س = ٣ ، س = ٤ في المقدار : { ∆ } نجد أن :

د { ٣ } = ك { ٣ } × صفر + ٣م + ب ⇐ ٣م + ب = ٤ .... { ١ }

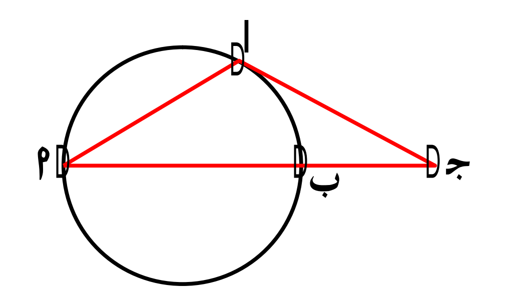
د { ٤ } = ك { ٤ } × صفر + ٤م + ب ⇐ ٤م + ب = ٣ .... { ٢ }

الآن :

بحل النظام من : { ١ } ، { ٢ } نجد أن : باقي القسمة : ٧ - س

⇐ الإجابة الصحيحة هي : جـ

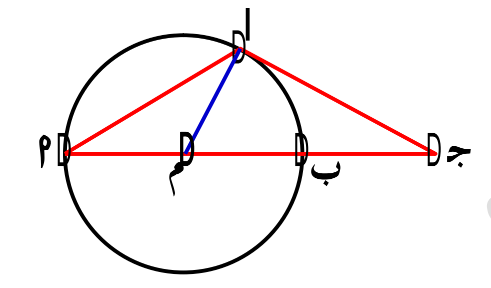
138



في الشكل المرافق مد القطر : أ ب بمقدار وحدة واحدة خارج الدائرة إلى النقطة : حـ ، وكان الخط المستقيم : حـ أ مماساً للدائرة ، وكانت الزاوية : أ حـ ب = 30° ، فإن مساحة المثلث : أ م حـ تساوي :

أ- $\frac{3}{8}$	ب- $\frac{\sqrt{3}}{4}$	جـ- $\frac{3}{4}$	د- $\frac{3\sqrt{3}}{4}$	هـ- $\frac{3\sqrt{3}}{٢}$

الحل :



برسم نصف القطر الذي يقطع النقطة : ا كما في الرسم :

الآن :

المثلث : جـ ا م قائم الزاوية في : ا ، مع ملاحظة أن : |ا f| = |ا]| أنصاف أقطار نجد أن :

جا(30) = |ا]| / |ا حـ| = |ا]| / (1 + |ا ب|) Ü 1/٢ = |ا]| / (1 + |ا]|)

Ü 1/٢ + 1/٢ |ا]| = |ا]|

Ü 1/٢ |ا]| = 1/٢ Ü |ا]| = ٢

الآن :

|ا]| = |اأ| = |اب| = |حـب| = 1 Ü |حـ أ| = 3

كذلك :

من نظرية فيثاغورث سنجد أن : |حـ]| = $\sqrt{3}$

فائدة :

ممكن نستنتج أبعاد المثلث : جـ ا م بملاحظة زوايا المثلث ونوعه : ثلاثيني ــ ستيني .

الآن :

مساحة المثلث : أحـ] = $\frac{1}{٢}$ × |حـ]| × |حـ أ| × جا(30)

= $\frac{1}{٢}$ × $\sqrt{3}$ × 3 × $\frac{1}{٢}$ = $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

⇐ الإجابة الصحيحة هي : د

139

عدد الثلاثيات التي تحقق النظام :

$$s = \frac{ʿu4}{ʿu4 + 1} \quad ، \quad u = \frac{ʿw4}{ʿw4 + 1} \quad ، \quad w = \frac{ʿs4}{ʿs4 + 1}$$

أ- 1	ب- ٢	جـ- 3	د- 4	هـ- 5

140

إذا كانت :

٣×د { س - ٢٠١٠ } + ٤×د { ٢٠١٠ - س } = ٥× { س - ٢٠١٠ }

فإن : د { ٢٠١٠ } =

أ- 1005	ب- 10050	جـ- 1050	د- 10500	هـ- 10005

141

قيمة : ظتا(70°) + ٤ جتا(70°) =

أ- $\frac{1}{٢}$	ب- $\frac{\sqrt{3}}{٢}$	جـ- $\frac{3}{٢}$	د- $\sqrt{3}$	هـ- $\frac{3\sqrt{3}}{٢}$

139

عدد الثلاثيات التي تحقق النظام :

$$w = \frac{4s^2}{1+4s^2} \quad ، \quad u = \frac{4w^2}{1+4w^2} \quad ، \quad s = \frac{4u^2}{1+4u^2}$$

أ 1	ب ٢	جـ 3	د 4	هـ 5

الحل :

بالملاحظة نجد أن : س = ص = ع = ٠ تحقق النظام ⇐ هذا أول حل .

الآن :

بضرب المعادلات ببعضها نجد أن :

$$uws = \frac{64 s^2 w^2 u^2}{(1+4s^2)(1+4w^2)(1+4u^2)}$$

$$\Rightarrow \quad 1 = \frac{64uws}{(1+4s^2)(1+4w^2)(1+4u^2)}$$

$$\Rightarrow \quad 64uws = (1+4s^2)(1+4w^2)(1+4u^2)$$

الآن :

من متباينة الوسطين : الحسابي والهندسي نعلم أن :

$$\frac{1+4s^2}{2} \geq 2s \Rightarrow 1+4s^2 \geq 4s \cdots (1)$$

بالمثل : نجد أن :

$$\frac{1+4w^2}{2} \geq 2w \Rightarrow 1+4w^2 \geq 4w \cdots (٢)$$

كذلك :

$$\frac{1+4u^2}{2} \geq 2u \Rightarrow 1+4u^2 \geq 4u \cdots\cdots (3)$$

ولكن :

بضرب المتباينات الثلاث نجد أن :

uws64 £ (٢s4 + 1)(٢w4 + 1)(٢u4 + 1)

الآن :

فقط نبحث عن القيم التي تحقق التساوي وعندها يتحقق النظام :

uws64 = (٢s4 + 1)(٢w4 + 1)(٢u4 + 1)

فيكفي البحث في تساوي أحد المتباينات الثلاث فقط لأن المتباينات متماثلة :

$\frac{1}{٢}$ = s Ü 0 = ٢(1 - s٢) Ü 0 = 1 + s4 - ٢s4 Ü s4 = ٢s4 + 1

$\frac{1}{٢}$ = u = w = s \

∴ عدد الحلول التي تحقق النظام حلان فقط .

⇐ الإجابة الصحيحة هي : ب

140

إذا كانت :

٣×د { س - ٢٠١٠ } + ٤×د { ٢٠١٠ - س } = ٥× { س - ٢٠١٠ }

فإن : د { ٢٠١٠ } =

ا - 1005	ب - 10050	جـ - 1050	د - 10500	هـ - 10005

الحل :

نوجد قيمة المقدار عند : س = ٠ ، نجد أن :

٣ × د { - ٢٠١٠ } + ٤ × د { ٢٠١٠ } = - ٥ × ٢٠١٠ ....{ ١ }

نوجد قيمة المقدار عند : س = ٤٠٢٠ ، نجد أن :

٣ × د { ٢٠١٠ } + ٤ × د { - ٢٠١٠ } = ٥ × ٢٠١٠ ....{ ٢ }

بضرب : { ١ } في ٤ ، يصبح المقدار على الصورة :

١٢ × د { - ٢٠١٠ } + ١٦ × د { ٢٠١٠ } = - ٢٠ × ٢٠١٠ ....{ ٣ }

بضرب : { ٢ } في - ٣ ، يصبح المقدار على الصورة :

- ٩× د { ٢٠١٠ } - ١٢ × د { - ٢٠١٠ } = - ١٥ × ٢٠١٠ ......{ ٤ }

الآن :

بجمع : { ٣ } ، { ٤ } ، نجد أن :

٧ × د { ٢٠١٠ } = - ٣٥ × ٢٠١٠ ⇐ د { ٢٠١٠ } = - ١٠٠٥٠

⇐ الإجابة الصحيحة هي : ب

141

قيمة : $\text{ظتا}(70°) + ٤\,\text{جتا}(70°) =$

أ) $\frac{1}{٢}$	ب) $\frac{\sqrt{3}}{٢}$	جـ) $\frac{3}{٢}$	د) $\sqrt{3}$	هـ) $\frac{3\sqrt{3}}{٢}$

الحل :

$$\text{ظتا}(70°) + ٤\,\text{جتا}(70°) = \frac{\text{جتا}(70°)}{\text{جا}(70°)} + ٤\,\text{جتا}(70°)$$

$$= \frac{\text{جتا}(70°) + ٤\,\text{جا}(70°)\text{جتا}(70°)}{\text{جا}(70°)}$$

$$= \frac{\text{جتا}(70°) + ٢\,\text{جا}(140°)}{\text{جا}(70°)}$$

$$= \frac{\text{جتا}(30°+40°) + ٢\,\text{جا}(40°)}{\text{جا}(70°)}$$

$$= \frac{\text{جتا}(30°)\text{جتا}(40°) - \text{جا}(30°)\text{جا}(40°) + ٢\,\text{جا}(40°)}{\text{جا}(70°)}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{٢}\times\text{جتا}(40°) + \frac{3}{٢}\times\text{جا}(40°)}{\text{جا}(70°)}$$

$$= \frac{\sqrt{3}\times\left(\frac{1}{٢}\times\text{جتا}(40°) + \frac{\sqrt{3}}{٢}\times\text{جا}(40°)\right)}{\text{جا}(70°)}$$

$$= \frac{\sqrt{3}\times\left(\text{جا}(30°)\text{جتا}(40°) + \text{جتا}(30°)\times\text{جا}(40°)\right)}{\text{جا}(70°)}$$

$$= \frac{\sqrt{3}\times\text{جا}(30°+40°)}{\text{جا}(70°)} = \frac{\sqrt{3}\times\text{جا}(70°)}{\text{جا}(70°)} = \sqrt{3}$$

⇐ الإجابة الصحيحة هي : د)

142

إذا كانت : $s = \sqrt{7} - 1$ ، **فإن قيمة المقدار :**

$3s^3 + 12s^2 - 6s - 12$ **تساوي :**

أ- $\sqrt{7}$	ب- $\sqrt{7} - 1$	جـ- 24	د- 42	هـ- 1

143

عدد حلول المعادلة :

$$\sqrt[3]{s - 1} + \sqrt[3]{s + 1} = \sqrt[3]{2} \times s$$

أ- 1	ب- ٢	جـ- 3	د- 4	هـ- 5

144

إذا كانت الزاوية : هـ في الربع الرابع ؛ حيث : جا(هـ) + جتا(هـ) $= -\frac{1}{5}$

، فإن قيمة : $\frac{\text{٢جا(هـ)}}{\text{جتا(هـ)} - \text{جا(هـ)} - \text{جتا(3هـ)} + \text{جا(3هـ)}} =$

أ- $-\frac{25}{17}$	ب- $-\frac{25}{31}$	جـ- $\frac{25}{17}$	د- $\frac{25}{31}$	هـ- $-\frac{17}{25}$

142

إذا كانت : $\text{س} = \sqrt{7} - 1$ ، **فإن قيمة المقدار :**

$3\text{س}^3 + 12\text{س}^2 - 6\text{س} - 12$ **تساوي :**

أ- $\sqrt{7}$	ب- $\sqrt{7} - 1$	جـ- 24	د- 42	هـ- 1

الحل :

الفكرة هي تحليل المقدار ثم التعويض عن قيمة : س .

$$3\text{س}^3 + 12\text{س}^2 - 6\text{س} - 12 = 3\text{س}(\text{س}^2 - 2) + 12(\text{س}^2 - 1)$$

$$= 3\text{س}(\text{س}^2 - 2) + 12(\text{س} + 1)(\text{س} - 1)$$

الآن :

بالتعويض عن قيمة : $\text{س} = \sqrt{7} - 1$ نجد أن :

$$3\text{س}(\text{س}^2 - 2) + 12(\text{س} + 1)(\text{س} - 1)$$

$$= 3(\sqrt{7} - 1)((\sqrt{7} - 1)^2 - 2) + 12((\sqrt{7} - 1) + 1)((\sqrt{7} - 1) - 1)$$

$$= 3(\sqrt{7} - 1)(6 - 2\sqrt{7}) + 12\sqrt{7}(\sqrt{7} - 2)$$

$$= 3(8\sqrt{7} - 20) + (84 - 12\sqrt{7})$$

$$= 3(8\sqrt{7} - 20) + (84 - 24\sqrt{7})$$

$$= 24\sqrt{7} - 60 + 84 - 24\sqrt{7} = 24$$

⇐ الإجابة الصحيحة هي : جـ

143

عدد حلول المعادلة :

$$\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x+1}=x\times\sqrt[3]{2}$$

أ) 1	ب) ٢	جـ) 3	د) 4	هـ) 5

الحل :

نفرض : أ $=\sqrt[3]{x-1}$ ، ب $=\sqrt[3]{x-1}$ ، أ + ب $=\sqrt[3]{2}\times x$

ولكن : (أ + ب)^3 = أ^3 + ب^3 + ٣أب (أ + ب)

$$2x^3=2x+3\times\sqrt[3]{2}\times x\sqrt[3]{x^2-1}$$

$$\Rightarrow 2x^3-2x-3\times\sqrt[3]{2}\times x\sqrt[3]{x^2-1}=0$$

$$\Rightarrow x\left(2x^2-2-3\times\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{x^2-1}\right)=0$$

س = ٠ وهذا أول حل يحقق المعادلة .

$$2x^2-2-3\times\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{x^2-1}=0$$

$$\Rightarrow 2x^2-2=3\times\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{x^2-1}$$

$$\Rightarrow 8\left(x^2-1\right)^3=54\left(x^2-1\right)$$

$$\Rightarrow 8\left(x^2-1\right)^3-54\left(x^2-1\right)=0$$

$$\Rightarrow \left(x^2-1\right)\left(8\left(x^2-1\right)^2-54\right)=0$$

س^2 - ١ = ٠ ⇐ س = ± ١ وهذان حلان يحققان المعادلة .

$$8(s^2 - 1)^2 - 54 = 0 \quad Ü \quad 8s^4 - 16s^2 - 46 = 0$$

مميز المعادلة : ٨س@ - ١٦س - ٤٦ يساوي : ١٧٢٨

∴ الجذران هما : $\frac{4 \pm \sqrt{108}}{4}$ ، وبالتجربة نجد أنهما لا يحققان العادلة .

∴ عدد الحلول = ٣ .

⇐ الإجابة الصحيحة هي : جـ

144

إذا كانت الزاوية : جـ في الربع الرابع ؛ حيث : جا(جـ) + جتا(جـ) = $-\frac{1}{5}$

، فإن قيمة : $\frac{\text{٢جا(جـ)}}{\text{جتا(جـ) − جا(جـ) − جتا(3جـ) + جا(3جـ)}}$ =

أ- $-\frac{25}{17}$	ب- $-\frac{25}{31}$	جـ- $\frac{25}{17}$	د- $\frac{25}{31}$	هـ- $-\frac{17}{25}$

الحل :

نقوم بتبسيط المقام باستخدام قوانين التحويل من جمع إلى ضرب ؛ نجد أن :

جا(3جـ) − جا(جـ) = ٢جا(جـ)جتا(٢جـ)

جتا(جـ) − جتا(3جـ) = ٢جا(جـ)جا(٢جـ)

الآن :

بالتعويض في المقام وأخذ : ٢جا(جـ) عامل مشترك ؛ نجد أن :

$$\frac{\text{٢جا(جـ)}}{\text{جتا(جـ) − جا(جـ) −جتا(3جـ)+جا(3جـ)}} = \frac{\text{٢جا(جـ)}}{\text{٢جا(جـ)جتا(٢جـ)+٢جا(جـ)جا(٢جـ)}}$$

$$= \frac{\text{٢جا(جـ)}}{\text{٢جا(جـ)[جتا(٢جـ)+جا(٢جـ)]}}$$

$$= \frac{1}{\text{جتا(٢جـ)+جا(٢جـ)}}$$

الآن :

كل ماعلينا هو إيجاد قيم : جتا(٢هـ) ، جا(٢هـ)

بتربيع المقدار : جا(هـ) + جتا(هـ) = $-\frac{1}{5}$ نجد أن :

جا٢(هـ) + جتا٢(هـ) + ٢جا(هـ)جتا(هـ) = $\frac{1}{25}$ Ü 1 + جا(٢هـ) = $\frac{1}{25}$

Ü جا(٢هـ) = $-\frac{24}{25}$

∴ من المتطابقة الأساسية الأولى نجد أن : جتا(٢هـ) = $\frac{7}{25}$

الآن :

الزاوية : هـ واقعة في الربع الرابع :

Ü 270° < هـ < 360° Ü 540° < ٢هـ < 720° Ü 180° < ٢هـ < 360°

∴ جتا(٢هـ) تحتمل قيمتين هما : جتا(٢هـ) = ± $\frac{7}{25}$.

الآن : ندرس القيمتين نجد أن :

$$\frac{٢جا(هـ)}{جتا(هـ) - جا(هـ) - جتا(3هـ) + جا(3هـ)} = \frac{1}{جتا(٢هـ) + جا(٢هـ)} = \frac{1}{\frac{7}{25} - \frac{24}{25}} = -\frac{25}{17}$$

أو :

$$\frac{٢جا(هـ)}{جتا(هـ) - جا(هـ) - جتا(3هـ) + جا(3هـ)} = \frac{1}{جتا(٢هـ) + جا(٢هـ)} = \frac{1}{-\frac{7}{25} - \frac{24}{25}} = -\frac{25}{31}$$

⟸ **هناك إجابتان محتملتان هما : أ ، ب**

145

إذا كانت : $ق(س) = (2س^5 + 2س^4 - 31س^3 - 35س + 32)^{2010}$ ،

فإن قيمة : $ق\left(\frac{\sqrt{67} - 1}{2}\right) =$

أ- -1	ب- 1	جـ- 2^{2010}	د- 3^{2010}	هـ- 2^{4020}

146

عدد الثنائيات التي تحقق المعادلة :

$$س^2 - 2س\,جا(س\,ص) + 1 = 0$$

أ- 1	ب- 2	جـ- 3	د- 4	هـ- 5

147

عدد القيم الصحيحة الموجبة : ج التي تجعل العدد الحقيقي : $\frac{ج}{100 - ج}$

مربع كامل تساوي :

أ- 1	ب- 2	جـ- 3	د- 4	هـ- 5

145

إذا كانت : $د(س) = (٢س^5 + ٢س^4 - 31س^3 - 35س + 32)^{2010}$ ،

فإن قيمة : $د\left(\frac{\sqrt{67} - 1}{٢}\right) =$

أ - -1	ب - 1	جـ - ٢^{2010}	د - 3^{2010}	هـ - ٢^{4020}